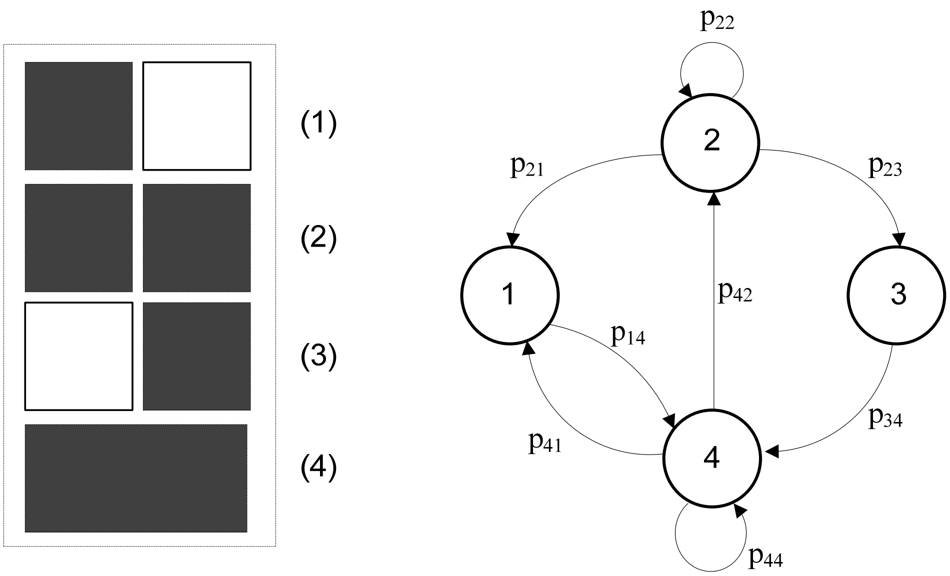
Elektrotehnički fakultet univerziteta u Beogradu *18. oktobar 2008.*
Katedra za Računarsku tehniku i informatiku

Performanse računarskih sistema (IR4PRS, SI4PRS)
-rešenja zadataka-

1. Moguća stanja sistema i dijagram prelaza između stanja dati su na narednoj slici.



Ako su Ps i Pb verovatnoće da je određeni posao mali, odnosno veliki, respektivno, tada je:
$Ps = \frac{2}{3},\ Pb = \frac{1}{3}$. Verovatnoće prelaza su tada:

$$p_{14} = p_{34} = 1$$

$$p_{21} = \frac{1}{2} \cdot Pb = \frac{1}{6},\ p_{22} = Ps = \frac{2}{3},\ p_{23} = \frac{1}{2} \cdot Pb = \frac{1}{6}$$

$$p_{41} = Ps \cdot Pb = \frac{2}{9},\ p_{42} = Ps \cdot Ps = \frac{4}{9},\ p_{44} = Pb = \frac{1}{3}$$

Jednačine ovog sistema su:

$$p_1 = \frac{1}{6} \cdot p_2 + \frac{2}{9} \cdot p_4$$

$$p_2 = \frac{2}{3} \cdot p_2 + \frac{4}{9} \cdot p_4$$

$$p_3 = \frac{1}{6} \cdot p_2$$

$$p_4 = p_1 + p_3 + \frac{1}{3} \cdot p_4$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

Rešavanjem sistema dobijaju se verovatnoće stanja:

$$p_1=\frac{4}{27},\ p_2=\frac{4}{9},\ p_3=\frac{2}{27},\ p_4=\frac{1}{3}$$

$$U=\frac{1}{2}\cdot p_1+p_2+\frac{1}{2}\cdot p_3+p_4=\frac{8}{9}=0.8889$$

2. $T_{am}(x)=t_{\min}+(t_{\max}-t_{\min})\cdot\frac{x-1}{2002-2}=5ms+(45-5)ms\cdot\frac{x-1}{2000}=\left(5+\frac{x-1}{50}\right)ms$

$$\bar{t}_{12}=\bar{t}_{21}=\frac{1}{N_1}\cdot\sum_{x=101}^{112}\frac{1}{N_2}\cdot\sum_{y=801}^{816}Tam(y-x)=\frac{1}{12}\cdot\sum_{x=101}^{112}\frac{1}{16}\cdot\sum_{y=801}^{816}(5+\frac{y-x-1}{50})=$$

$$=\frac{1}{9600}\cdot\sum_{x=101}^{112}\sum_{y=801}^{816}(y-x+249)=$$

$$=\frac{1}{9600}\cdot\sum_{x=0}^{11}\sum_{y=700}^{715}(y-x+249)=\frac{1}{9600}\cdot\sum_{x=0}^{11}\left(249\cdot16-16x+\sum_{y=700}^{715}y\right)=$$

$$=\frac{1}{9600}\cdot\sum_{x=0}^{11}\left(249\cdot16-16x+8\cdot\left(700+715\right)\right)=\frac{1}{9600}\cdot\sum_{x=0}^{11}\left(15304-16x\right)=$$

$$=\frac{1}{9600}\cdot\left(12\cdot15304-16\cdot\frac{11\cdot12}{2}\right)=\frac{182592}{9600}=19.02ms$$

$$\bar{t}_{11}=\frac{2}{N_1^{\,2}}\cdot\sum_{z=i}^{N_1-1}\left(N_1-z\right)\cdot Tam(z)=\frac{2}{144}\cdot\sum_{z=i}^{11}(12-z)\cdot\left(5+\frac{z-1}{50}\right)=\frac{1}{3600}\cdot\sum_{z=i}^{11}(12-z)\cdot\left(z+249\right)=$$

$$=\frac{1}{3600}\cdot\sum_{z=i}^{11}\left(2988-237z-z^2\right)=\frac{1}{3600}\cdot\left(2988\cdot11-237\cdot\frac{11\cdot12}{2}-\frac{11\cdot12\cdot23}{6}\right)=4.644ms$$

$$=\frac{1}{3600}\cdot\left(2988\cdot11-237\cdot\frac{11\cdot12}{2}-\frac{11\cdot12\cdot23}{6}\right)=\frac{1}{3600}\cdot\left(32868-15642-506\right)=$$

$$\bar{t}_{22}=\frac{2}{N_2^{\,2}}\cdot\sum_{z=i}^{N_2-1}\left(N_2-z\right)\cdot Tam(z)=\frac{1}{6400}\cdot\sum_{z=i}^{15}(16-z)\cdot\left(z+249\right)=\frac{1}{6400}\cdot\sum_{z=i}^{15}\left(3984-233z-z^2\right)=$$

$$=\frac{1}{6400}\cdot\left(3984\cdot15-233\cdot\frac{15\cdot16}{2}-\frac{15\cdot16\cdot31}{6}\right)=\frac{1}{6400}\cdot\left(59760-27960-1240\right)=4.775ms$$

$$\overline{T_{am}}=p_{11}\cdot\overline{t_{11}}+p_{12}\cdot\overline{t_{12}}+p_{21}\cdot\overline{t_{21}}+p_{22}\cdot\overline{t_{22}}=\left(\frac{12}{28}\right)^2\cdot4.644ms+2\cdot\frac{12}{28}\cdot\frac{16}{28}\cdot19.02ms+\left(\frac{16}{28}\right)^2\cdot4.775ms$$

$$=0.853\text{ms}+9.316\text{ms}+1.559\text{ms}=11.728\text{ms}$$

$$\overline{T_{acc}}=\overline{T_{am}}+\frac{1}{2}T_{rev}=\overline{T_{am}}+\frac{30}{N_{rev}}=17.2837ms$$

3. Ako poslovi stižu u proseku na svakih 16 ms, tada je intenzitet prispeća zahteva $\lambda=\frac{1}{a}=62.5\,posl/\sec$. Prvi sistem je M/M/1 server za koji važi:

$\mu_1 = \frac{1}{S_{p1}} = 100\, posl/\sec$. Ako količnik $\frac{\lambda}{\mu_1}$ obeležimo sa ρ_1, tada je $\rho_1 = 0.625$.

Srednji broj poslova: $J_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{5}{3}$

Srednje vreme odzuva: $T_1 = \frac{J_1}{X_1} = \frac{J_1}{\lambda} = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} = 26.666 ms$

Drugi sistem je M/M/2 sistem.

$$\rho_2 = \frac{\lambda}{2\mu_2}$$

$$p_0 \cdot \lambda = p_1 \cdot \mu_2 \quad \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu_2} \cdot p_0 = 2\rho_2 \cdot p_0$$

$$p_1 \cdot \lambda = p_2 \cdot 2\mu_2 \quad \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda}{2\mu_2} \cdot p_1 = 2 \cdot \rho_2^{\ 2} \cdot p_0$$

.....

$$p_{n-1} \cdot \lambda = p_n \cdot 2\mu_2 \quad \Rightarrow p_n = \frac{\lambda}{2\mu_2} \cdot p_{n-1} = 2 \cdot \rho_2^{\ n} \cdot p_0$$

$$p_0 \cdot \left(1 + 2\rho_2 + 2\rho_2^{\ 2} + \ldots + 2\rho_2^{\ n}\right) = 1$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{1}{1 + 2\rho_2 + 2\rho_2^{\ 2} + \ldots + 2\rho_2^{\ n}} = \frac{1}{1 + 2\rho_2\left(1 + \rho_2 + \rho_2^{\ 2} + \ldots + \rho_2^{\ n-1}\right)}$$

$$n \to \infty \Rightarrow p_0 = \frac{1}{1 + 2\rho_2 \cdot \frac{1}{1-\rho_2}} = \frac{1-\rho_2}{1+\rho_2}, \text{ za } \rho_2 \neq 1$$

$$p_j = 2\rho_2^{\ j} \cdot p_0 = 2\rho_2^{\ j} \cdot \frac{1-\rho_2}{1+\rho_2}$$

$$J_2 = \sum_{j=1}^{n} j \cdot p_j = \sum_{j=1}^{n} j \cdot 2\rho_2^{\ j} \cdot \frac{1-\rho_2}{1+\rho_2} = 2 \cdot \frac{1-\rho_2}{1+\rho_2} \cdot \rho_2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \rho_2^{\ j-1} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1-\rho_2}{1+\rho_2} \cdot \rho_2 \cdot \frac{1}{\left(1-\rho_2\right)^2} = \frac{2 \cdot \rho_2}{1-\rho_2^{\ 2}}$$

$$T_2 = \frac{J}{X} = \frac{J}{\lambda} = \frac{1}{\mu_2 \cdot \left(1-\rho_2^{\ 2}\right)} = \frac{4\mu_2}{4\mu_2^{\ 2} - \lambda^2}$$

Potrebno je naći opseg za μ_2 tako da odnos T_1/T_2 bude manji, odnosno veći od 1.

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 \Rightarrow \frac{4\mu_2}{4\mu_2^{\,2} - \lambda^2} = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} \Rightarrow 4\mu_2^{\,2} - 4\mu_2\left(\mu_1 - \lambda\right) - \lambda^2 = 0$$

$$\mu_2^{\,2} - \mu_2\left(\mu_1 - \lambda\right) - \frac{\lambda^2}{4} = 0$$

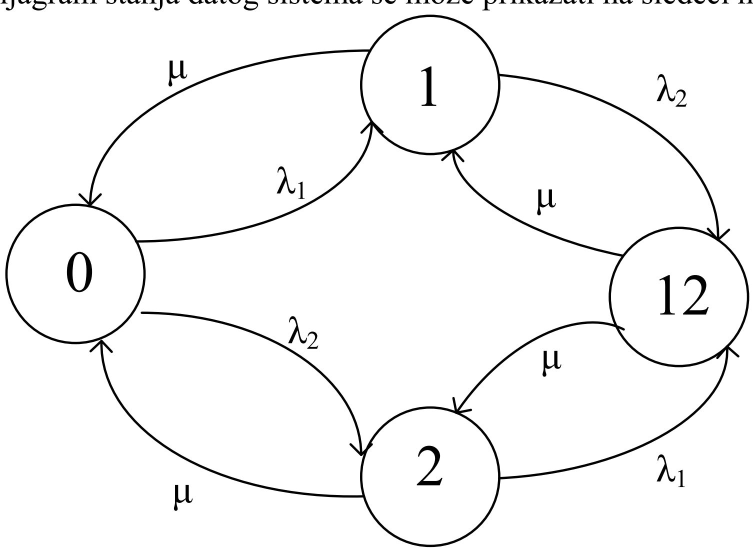
$$\mu_2 = \frac{\mu_1 - \lambda + \sqrt{\left(\mu_1 - \lambda\right)^2 + \lambda^2}}{2} = \text{ 55.193 (drugo rešenje je negativno)}$$

Za μ_2>55.193, tj. za $Sp_2 < \frac{1}{55.193 posl / \sec} = 18.118 ms$, drugi sistem je bolji.

Za μ_2<55.193, odnosno, $Sp_2 > \frac{1}{55.193 posl / \sec} = 18.118 ms$ prvi sistem je bolji.

Potrebno je primetiti daje za $\rho_2 = \frac{\lambda}{2\mu_2} < 1$. Povećavanjem μ_2 odnos ρ_2 je i dalje ostaje manji od 1, pa oba sistema normalno funkcionišu, pri čemu drugi ima manje vreme odziva. Smanjivanjem μ_2 prvi sistem ostaje bolji čak i kada u nekom trenutku postane $\rho_2 \geq 1$, tj. kada drugi sistem postane zasićen.

4. **a)** Dijagram stanja datog sistema se može prikazati na sledeći način:



Stanje 0 znači da je procesor besposlen, odnosno oba terminala razmišljaju. Stanja 1 i 2 znače da je terminal 1, odnosno 2, izdao zahtev, a preostali terminal razmišlja. Stanje 12 znači da su oba terminala izdala zahteve, pri čemu se zahtevi opslužuju u različitim procesorima.

Balansne jednačine za ovaj sistem:

$$p_0 \cdot \left(\lambda_1 + \lambda_2\right) = p_1 \cdot \mu + p_2 \cdot \mu$$

$$p_1 \cdot \left(\lambda_2 + \mu\right) = p_0 \cdot \lambda_1 + p_{12} \cdot \mu$$

$$p_2 \cdot \left(\lambda_1 + \mu\right) = p_0 \cdot \lambda_2 + p_{12} \cdot \mu$$

$$p_{12} \cdot 2\mu = p_1 \cdot \lambda_2 + p_2 \cdot \lambda_1$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_{12} = 1$$

Pri tom je:

$$\mu = \frac{1}{Sp},\ \lambda_1 = \frac{1}{\theta_1} = \frac{\mu}{4},\ \lambda_2 = \frac{1}{\theta_2} = \frac{\mu}{6}$$

$$p_0 \cdot \frac{5}{12} = p_1 + p_2$$

$$p_1 \cdot \frac{7}{6} = p_0 \cdot \frac{1}{4} + p_{12}$$

$$p_2 \cdot \frac{5}{4} = p_0 \cdot \frac{1}{6} + p_{12}$$

$$2 \cdot p_{12} = p_1 \cdot \frac{1}{6} + p_2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_{12} = 1$$

Rešavanjem sistema dolazi se do sledećih verovatnoća stanja:

$$p_0 = \frac{24}{35},\ p_1 = \frac{6}{35},\ p_2 = \frac{4}{35},\ p_{12} = \frac{1}{35}$$

Iskorišćenje svakog procesora i celog procesorskog sistema iznosi:

$$U = 1 - p_0 - \frac{1}{2}p_1 - \frac{1}{2}p_2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + p_{12} = \frac{6}{35}$$

Protok kroz procesor svaki:

$$X_1 = \frac{U}{Sp} = 17.14\,posl/\sec$$

Protok zahteva kroz sistem:

$$X = 2 \cdot X_1 = 34.28\,posl/\sec$$

Prosečan broj poslova u procesorskom sistemu:

$$J = p_1 + p_2 + 2 \cdot p_{12} = \frac{12}{35}$$

Vreme odziva sistema:

$$R = \frac{J}{X} = 10ms$$

Ovo vreme predstavlja očekivano vreme od trenutka izdavanja zahteva do kraja njegove obrade. Primetimo da je ovo vreme jednako procesorskoj obradi jednog zahteva, što je i očekivano, s obzirom da terminalski zahtevi nikada ne čekaju u procesorskom redu.

b) Ako je uključen samo prvi terminal, jedan od procesora je uvek slobodan za niskoprioritetnu obradu, a terminal povremeno koristi drugi procesor. Sistem tada ima dva stanja određena time da li terminal razmišlja (stanje 0) ili ne (stanje 1). Balansna jednačina sistema je:

$$p_0 \cdot \lambda_1 = p_1 \cdot \mu,\ \lambda_1 = \frac{1}{\theta_1},\ \Rightarrow p_1 = p_0 \cdot \frac{\lambda_1}{\mu} = p_0 \cdot 0.25$$

$$p_0 + p_1 = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{1 + 0.25} = 0.8,\ \ p_1 = 0.2$$

Iskorišćenje drugog procesora je tada U_2=1-p_0=0.2, a iskorišćenje prvog procesora je 0.

Ukupno iskorišćenje procesorskog sistema (od strane terminala) je:

$$U = \frac{1}{2} \cdot U_1 + \frac{1}{2} \cdot U_2 = 0.1$$

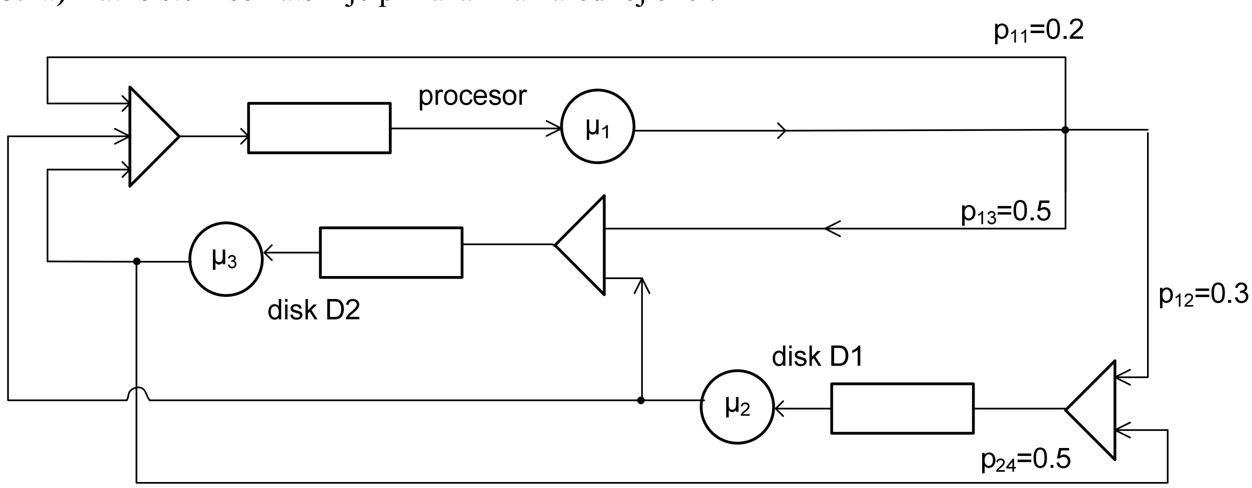
Drugi način da odredimo ovo iskorišćenje jeste da imamo u vidu da je u stanju 0 iskorišćenje sistema 0, a u stanju 1 iskorišćenje iznosi $0.5p_1$, pa je:

$$U = p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot \frac{1}{2} = 0.1$$

Ako je za niskoprioritetnu obradu bez prisustva terminala bilo potrebno vreme T, tada će u prisustvu prvog terminala ta obrada trajati vreme T_1, pri čemu je:

$$T_1 \cdot (1-U) = T \Rightarrow T_1 = \frac{T}{1-U} = \frac{180s}{0.9} = 200s$$

5. a) Dati sistem šematski je prikazan na narednoj slici.



$$\mu_1 = \frac{1}{s_p} = 100\sec^{-1}\ \mu_2 = \frac{1}{s_{D1}} = 25\sec^{-1}\ \mu_1 = \frac{1}{s_{D2}} = 40\sec^{-1}$$

Verovatnoće p_{32} i p_{23} se mogu odrediti na sledeći način, znajući da je protok kroz oba diska isti (svaki zahtev koji prođe kroz jedan disk, proći će i kroz drugi):
Ako sa X obeležimo protok kroz procesor, tada je protok kroz svaki disk 0.8X. Kako protok kroz granu 12 iznosi 0.3X, tada će protok kroz granu 32 iznositi 0.5X. Analogno će protok kroz granu 23 iznositi 0.3X. Kako je protok kroz drugi disk 0.8X, a protok kroz granu 23 0.3X, tada je

$$p_{23} = \frac{0.3 \cdot X}{0.8 \cdot X} = \frac{3}{8},\ \ p_{21} = 1 - p_{23} = \frac{5}{8}.$$ Analogno je:

$$p_{32} = \frac{0.5 \cdot X}{0.8 \cdot X} = \frac{5}{8},\ \ p_{31} = 1 - p_{32} = \frac{3}{8}$$

Gordon-Newell-ove jednačine za data 4 resursa:

$$-(1-p_{11})\mu_1 x_1 + p_{21}\mu_2 x_2 + p_{31}\mu_3 x_3 = 0$$
$$p_{12}\mu_1 x_1 - (1-p_{22})\mu_2 x_2 + p_{32}\mu_3 x_3 = 0$$
$$p_{13}\mu_1 x_1 + p_{23}\mu_2 x_2 - (1-p_{33})\mu_3 x_3 = 0$$

Usvajajući da je x_1=1, dobijamo:

$$-0.8\cdot 100 + \frac{5}{8}\cdot 25\cdot x_2 + \frac{3}{8}\cdot 40\cdot x_3 = 0$$

$$0.3\cdot 100 - 25\cdot x_2 + \frac{5}{8}\cdot 40\cdot x_3 = 0$$

$$0.5\cdot 100 + \frac{3}{8}\cdot 25\cdot x_2 - 40\cdot x_3 = 0$$

Rešenja su: $x_1 = 1,\ \ x_2 = 3.2,\ \ x_3 = 2$

b)

#	X1=1	X2=3.2	X3=2
0	1	1	**1 = G(0)**
1	1	4.2	**6.2 = G(1)**
2	1	14.44	**26.84 = G(2)**
3	1	47.208	**100.888 = G(3)**
4	1	152.0656	**353.8416 = G(4)**

$$g = \frac{G(3)}{G(4)} = 0.28512$$

Iskoriscenje procesora: $Up = g\cdot x1 = g = 0.28512$

Iskoriscenje diska 1: $U_{D1} = g\cdot x_2 = 0.91239$

Iskoriscenje diska 2: $U_{D3} = g\cdot x_3 = 0.57024$

Protok kroz procesor: $Xp = \frac{Up}{s_p} = 28.51219$ posl/sec

Protok kroz disk 1: $X_{D1} = \frac{U_{D1}}{s_{D1}} = 22.80975$ posl/sec

Protok kroz disk 2: $X_{D2} = \frac{U_{D2}}{s_{D2}} =$ 22.80975 posl/sec

Vreme odziva: $R = \frac{n}{X_p} = 140.29ms$

Usko grlo sistema je prvi disk, jer ima najveće iskorišćenje.

c) Srednji broj poslova u drugom disku:

$$\overline{n_{D1}} = \sum_{j=1}^{n} x_3{}^{j} \cdot \frac{G(n-j)}{G(n)} = 2 \cdot \frac{G(3)}{G(4)} + 4 \cdot \frac{G(2)}{G(4)} + 8 \cdot \frac{G(1)}{G(4)} + 16 \cdot \frac{G(0)}{G(4)} =$$

$$= \frac{16 \cdot G(0) + 8 \cdot G(1) + 4 \cdot G(2) + 2 \cdot G(3)}{G(4)} \approx 1.059$$