Računarska grafika 2

Transformacije u 2D i 3D grafici

Elementarne transformacije u 3D grafici

- Koristi se konvencija pokretnog **objekta** i **matrice kolona**

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_T \\ 0 & 1 & 0 & y_T \\ 0 & 0 & 1 & z_T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translacija

Objekat se pomera za vektor $\vec{T}\left(x_T, \quad y_T, \quad z_T\right)$

$$M_{RX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{RZ} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{RY} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacija

Objekat rotira oko X ose za ugao α,
oko Y ose za ugao β i oko Z ose za ugao γ.
Pozitivan smer rotacije je
nasuprot kretanja kazaljke časovnika.

$$S = \begin{bmatrix} S_X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Skaliranje

Faktori skaliranja po X, Y i Z osi: S_X , S_Y , S_Z

- Transformacije u 2D prostoru su slične, samo je potrebno ukloniti 3. vrstu i 3. kolonu priloženih matrica

Zadatak 1

- U X-Y koordinatnom sistemu trougao je određen temenima: A(2,6), B(4,6) i C(3,8).
  Ukoliko se objekat translatorno pomeri za vektor $O_1(-1,-1)$, zatim rotira u smeru kretanja kazaljke na časovniku za ugao 30° i konačno skalira faktorima za X-osu $S_x=2$, odnosno Y-osu: $S_y=1$, odrediti:
  - kompozitnu matricu transformacije
  - nove koordinate datog trougla

Zadatak 1 – rešenje (1/2)

Matrice elementarnih transformacija su:

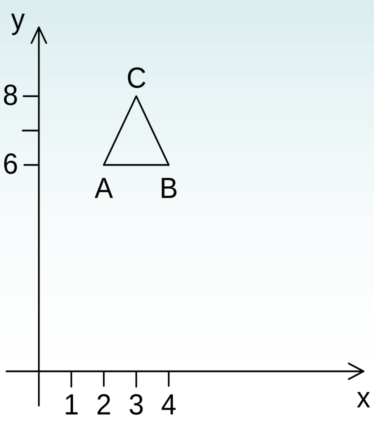
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ & 0 \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kompozitna matrica je:

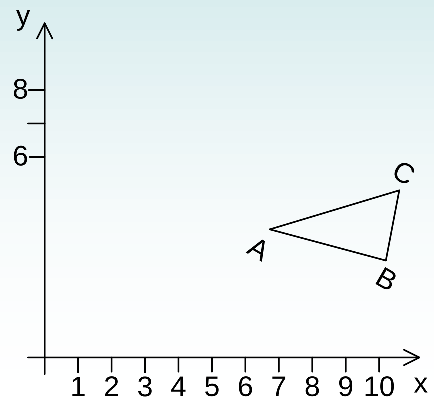
$$M = S \cdot R \cdot T = \begin{bmatrix} 1.732 & 1 & -2.732 \\ -0.5 & 0.866 & -0.366 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 1 – rešenje (2/2)

Početno stanje



Izgled nakon transformacija



$$A' = M \cdot A = \begin{bmatrix} 6.732 \\ 3.83 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad B' = M \cdot B = \begin{bmatrix} 10.196 \\ 2.83 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C' = M \cdot C = \begin{bmatrix} 10.464 \\ 5.062 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- U OpenGL-u bi se isti objekat pozicionirao na sledeći način

```
glMatrixMode(GL_MODELVIEW);
glPushMatrix();
glLoadIdentity();
glTranslated(-1,-1,0);
glRotated(-30, 0, 0, 1);
glScaled(2,1,1);
// crtanje figure u k.s. objekta
glPopMatrix();
```

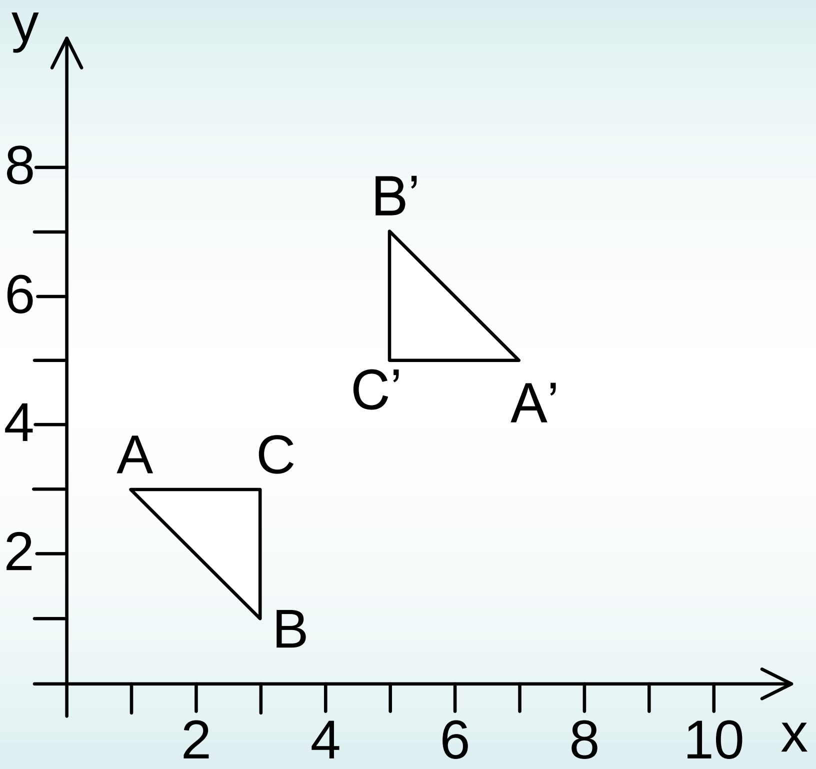
Zadatak 2

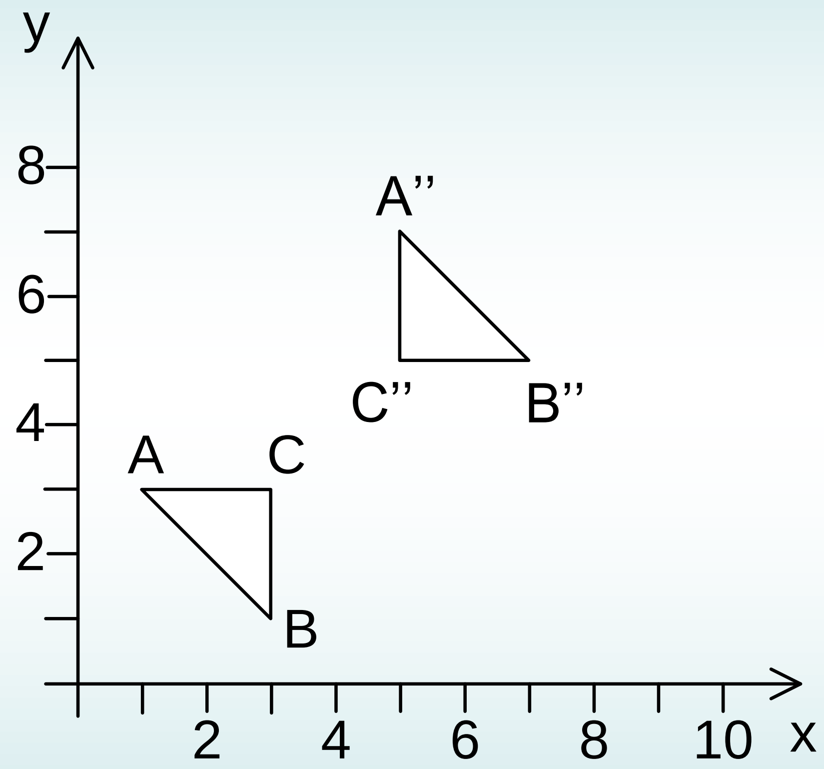
- Trougao ABC nalazi se na ekranu u položaju definisanom koordinatama tačaka A(1,3), B(3,1), C(3,3). Koordinatni početak se nalazi u donjem levom uglu ekrana.

  Odrediti kompozitnu matricu transformacija pokretnog objekta tako da se promeni položaja trougla ABC u položaj:

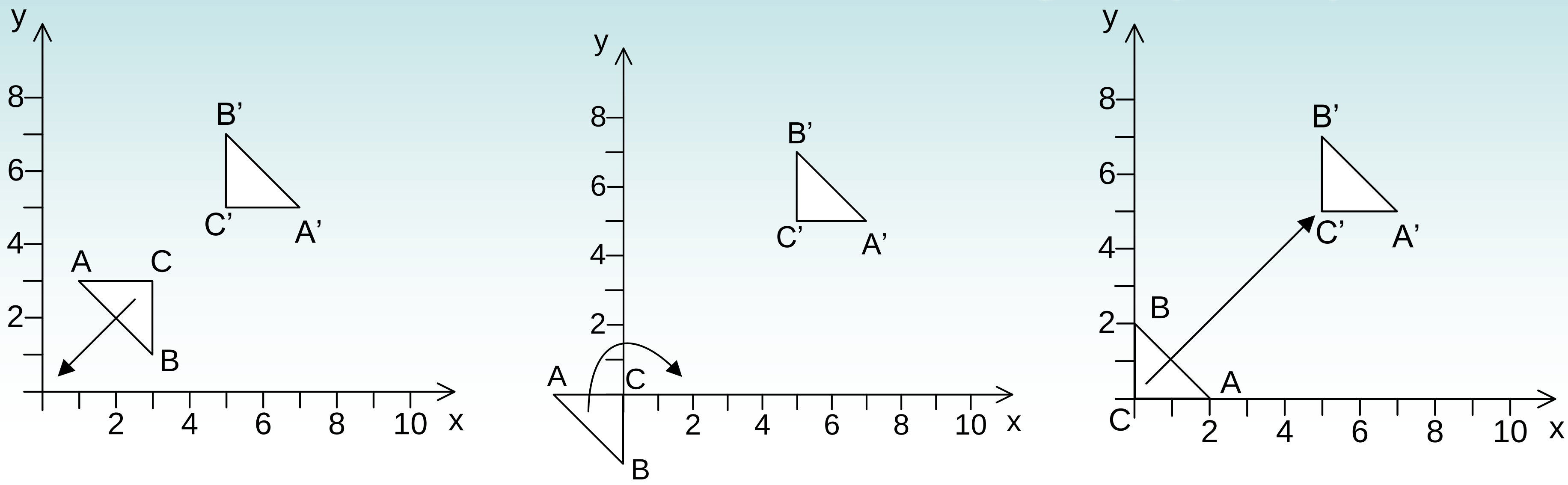
  - A'B'C', gde su koordinate tačaka A'(7,5), B'(5,7), C'(5,5)
  - A''B''C'', gde su koordinate tačaka A''(5,7), B''(7,5), C''(5,5)

Zadatak 2





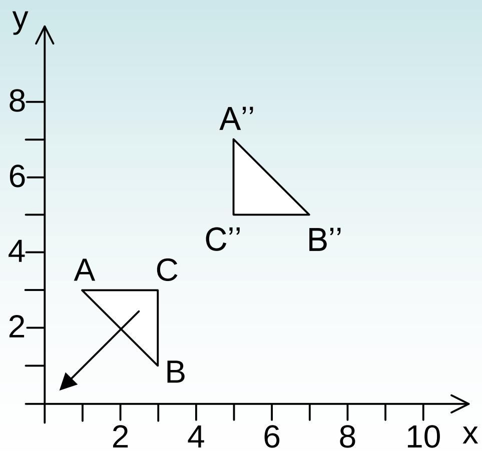
Zadatak 2 – rešenje (1/2)

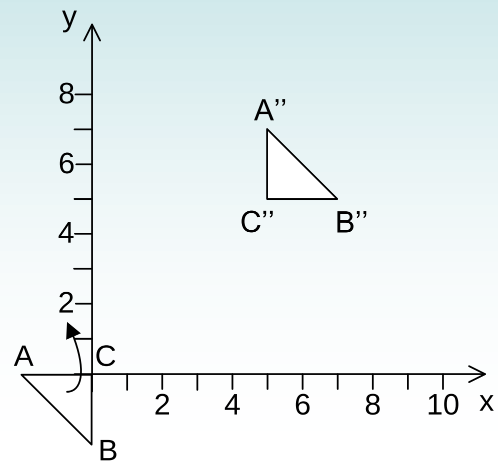


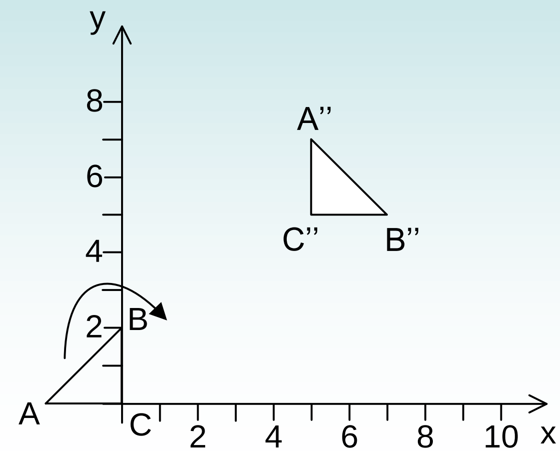
1.Translacija objekta tako da teme C bude u koordinatnom početku
2.Rotacija objekta u smeru kretanja kazaljke na časovniku za ugao $\alpha=\pi$
3.Translacija temena C u tačku (5,5)

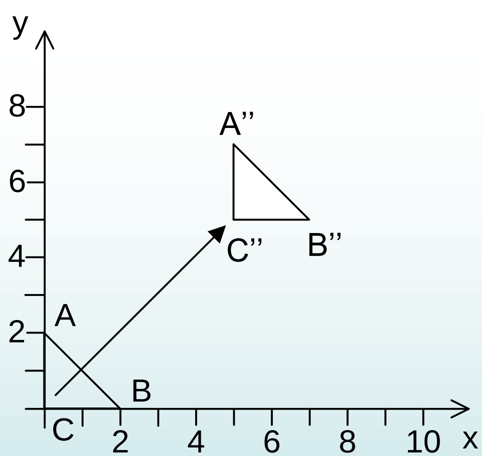
$$M = T_2 \cdot R \cdot T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 2 – rešenje (2/2)









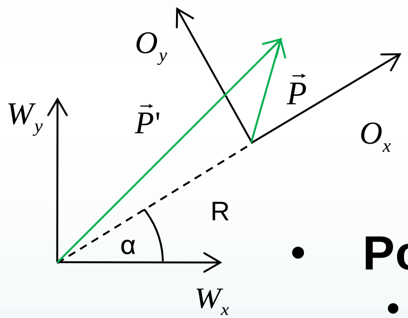
1. Translacija objekta tako da je teme C u koord. početku
2. Refleksija prema X-osi
3. Rotacija objekta u smeru kretanja kazaljke za ugao α=90°
4. Translacija temena C u tačku (5,5).

$$M = T_2 \cdot O_y \cdot O_x \cdot T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 3

- Ukoliko je tačka P određena vektorom (x, y, z) u koordinatnom sistemu objekta, pronaći koordinate iste tačke u koordinatnom sistemu sveta (*world space*).

  Na slici dole je prikazan položaj ova dva koordinatna sistema.



- Potrebno je pronaći matricu transformacije, M, koja "poravnava" sistem objekta u sistem sveta

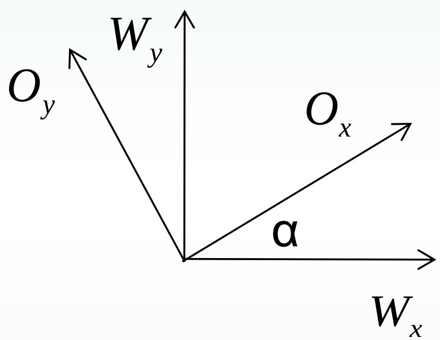
$$P' = M \cdot P$$

- **Postoje dva načina razmišljanja:**
  - **Prvi** je da se pođe od situacije da su k.s. bili preklopljeni, a da je onda k.s. sveta dospeo u datu poziciju translacijom i rotacijom. Iz perspektive k.s. sveta to izgleda kao da se tačka P pomerala, pa su i matrice transformacije u skladu sa konvencijom pokretnog objekta

$$M = R \cdot T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & R \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & R\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & R\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 3 – rešenje

- **Drugi** način je da pronađemo vektore $\vec{O}_x$ i $\vec{O}_y$ (i $\vec{O}_z$) kao i vektor translacije koordinatnog početka k. s. modela u k. s. sveta. Na osnovu toga se direktno dobija matrca transformacije.

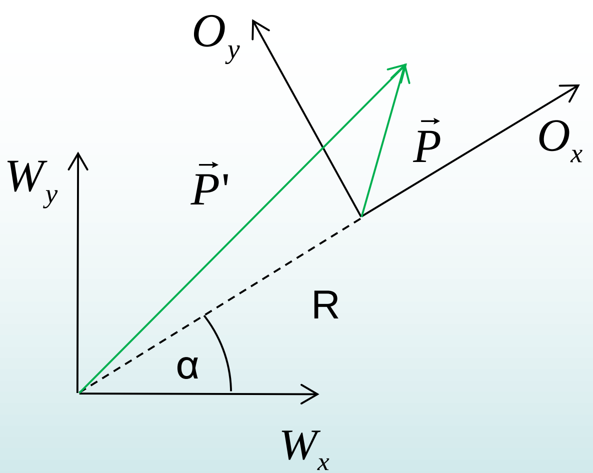


$$\begin{bmatrix} X(O_X) & X(O_Y) & X(O_Z) & T_X \\ Y(O_X) & Y(O_Y) & Y(O_Z) & T_Y \\ Z(O_X) & Z(O_Y) & Z(O_Z) & T_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_X' \\ V_Y' \\ V_Z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{O}_x(\ \cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0\ ) \\ \vec{O}_y(\ -\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ 0\ ) \\ \vec{O}_z(\ 0,\ 0,\ 1\ ) \\ \vec{T}(\ R\cos\alpha,\ R\sin\alpha,\ 0\ ) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad M = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & R\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & R\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 4

- Pronaći matricu transformacije koja preslikava k.s. sveta u k.s. objekta iz prethodnog zadatka.



- Jedan način je da se traže projekcije osa k.s. sveta u k.s. objekta
- Drugi način je da se pronađe inverz matrice M iz prethodnog zadatka

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & R\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & R\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 4 – rešenje

- Za ortonormalne matrice važi da je $M^{-1} = M^T$
- Matrica je ortonormalna ukoliko su vektori kolona međusobno ortogonalni i imaju jedinične dužine => mora drukčije da se traži inverz matrice M

$$M = \begin{array}{c} \text{Projekcije ortonormalnih vektora} \qquad \text{Translacija} \\ \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & R\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & R\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} M_P & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

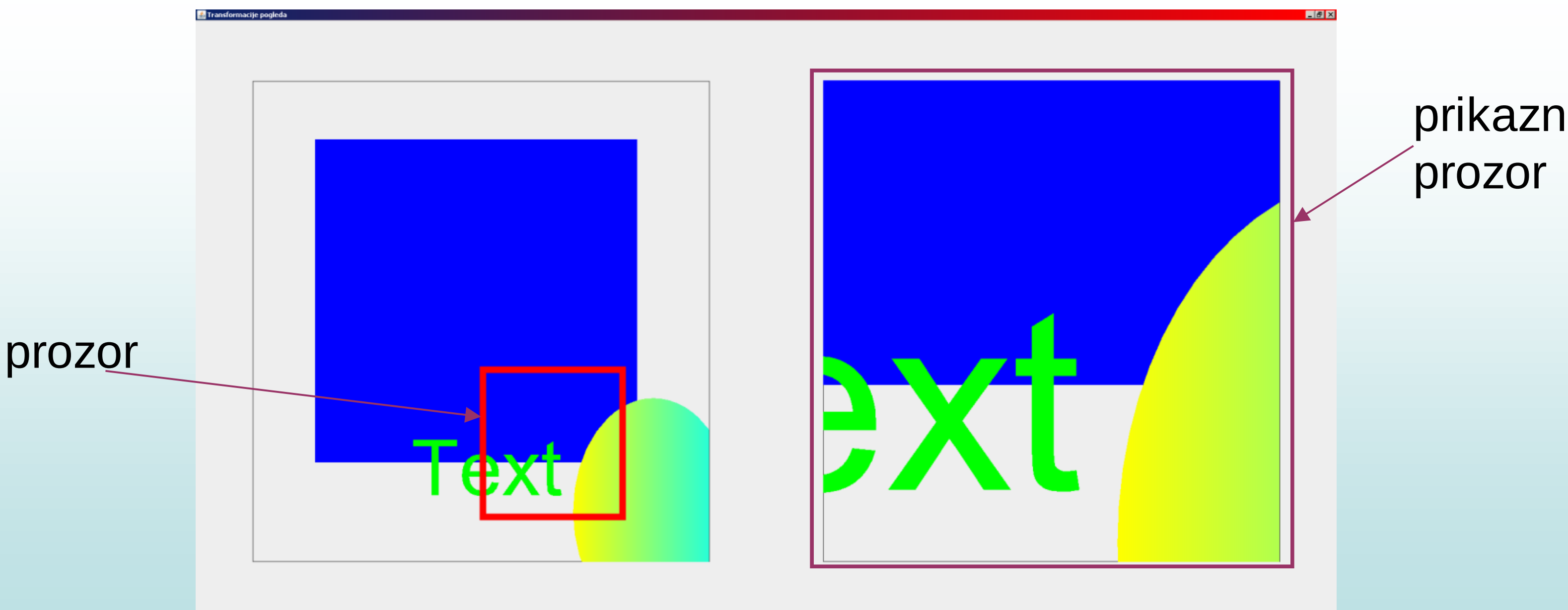
$$P' = M_P \cdot P + T \Rightarrow M_P^{-1} \cdot (P' - T) = P \Rightarrow M_P^T \cdot P' - M_P^T \cdot T = P$$

$$\Rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} M_P^T & -M_P^T \cdot T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & -R \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformacija prozor → prikazni prozor

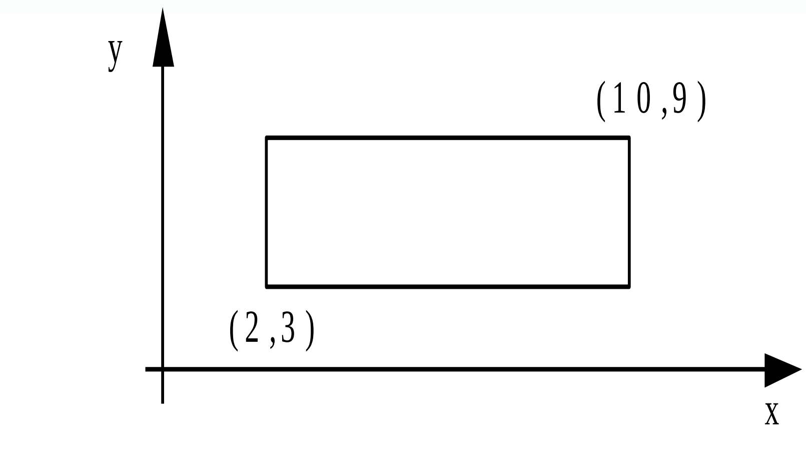
window→viewport

- Obezbeđuje razdvajanje postupka sastavljanja scene od njenog prikazivanja
- Window (prozor): određuje deo scene koji se posmatra
- Viewport (prikazni prozor): određuje poziciju, veličinu i orijentaciju dela prikazne površi u kojoj se prikazuje deo scene vidljiv u prozoru

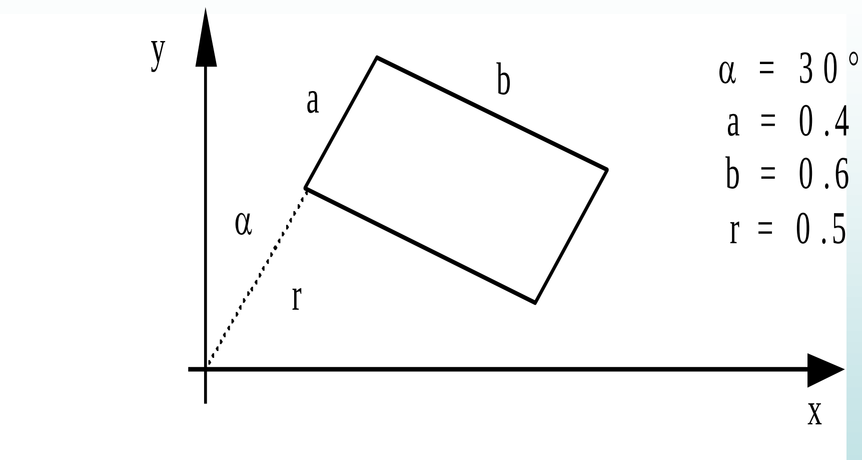


Zadatak 5

Izračunati kompozitnu matricu preslikavanja objekata iz prozora (Window) sa slike 1 u prikazni prozor (Viewport) na slici 2. Prozor se nalazi u koordinatnom sistemu realnog sveta, a prikazni prozor u normalizovanom koordinatnom sistemu prikaznog uređaja.

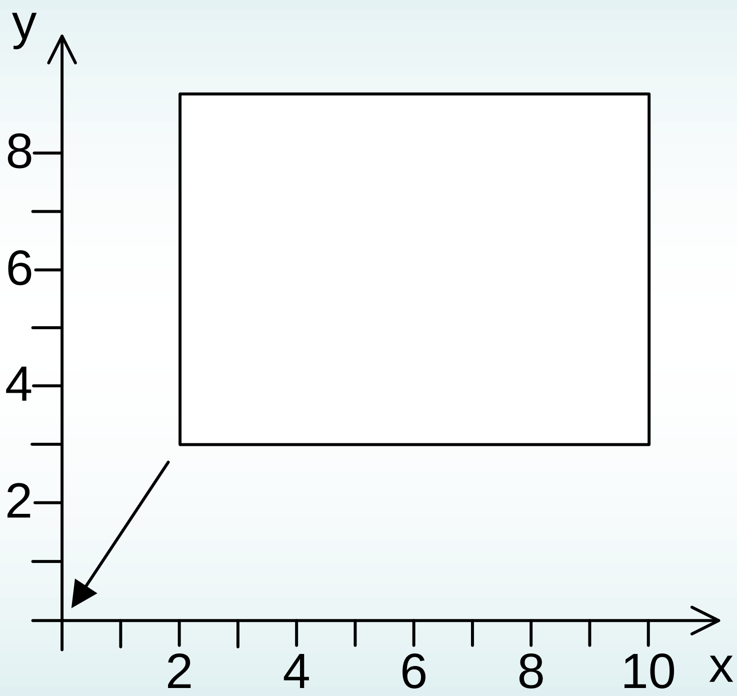


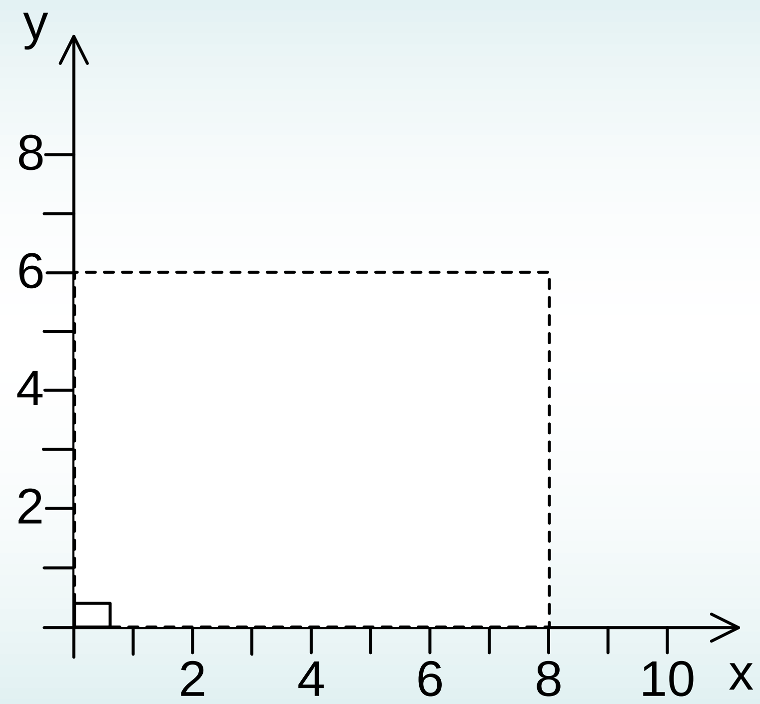
Slika 1



Slika 2

Zadatak 5 – rešenje

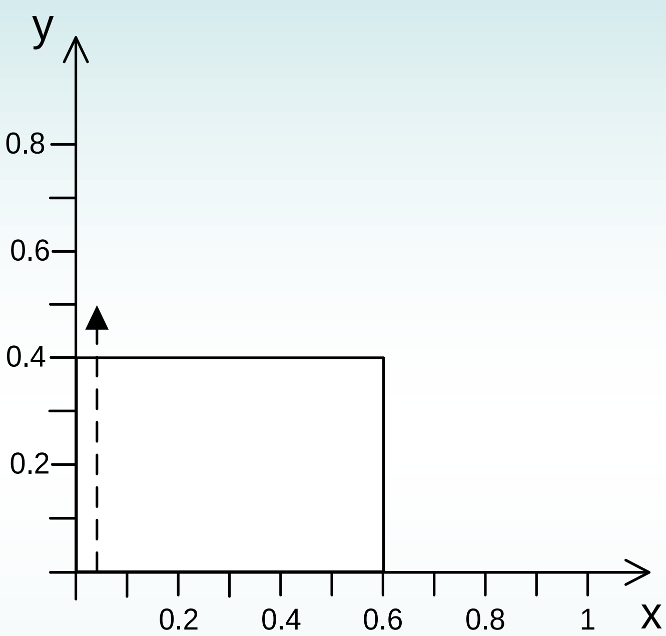


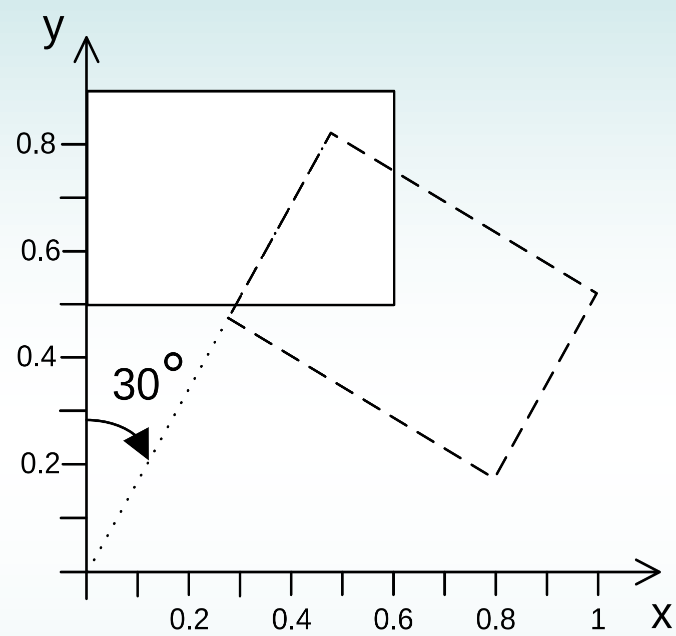


Translacija: donji levi ugao pravougaonika se postavlja u koordinatni početak

Skaliranje: (8,6)⇨(0.6,0.4)

Zadatak 5 – rešenje





Translacija: donji levi ugao pravougaonika se postavlja u (0, r)

Rotacija: oko koordinatnog početka za ugao 30°

Zadatak 5 – rešenje

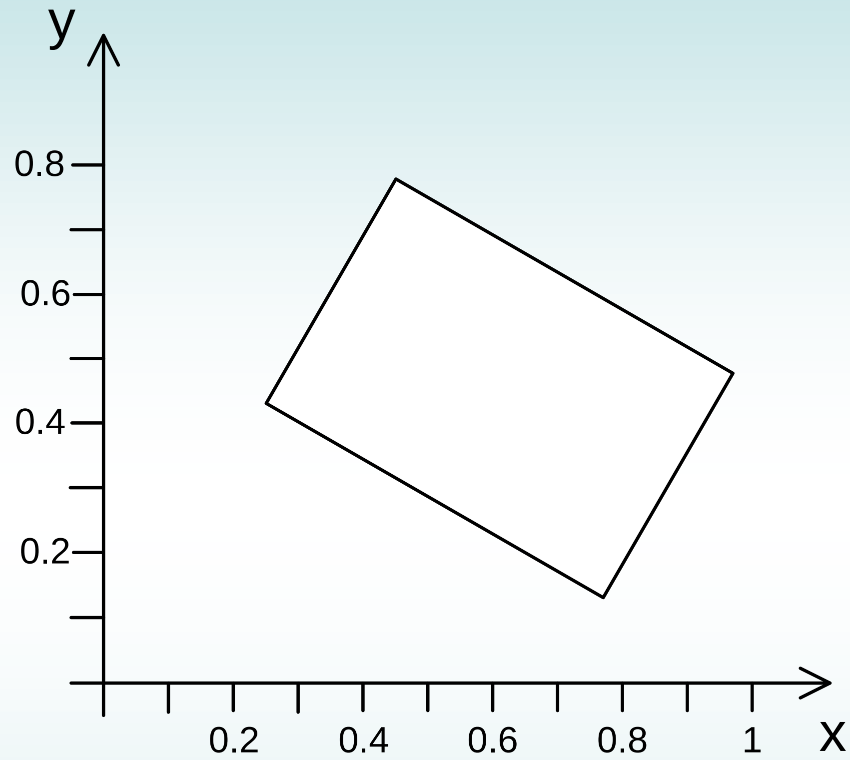
$$\boxed{M = R \cdot T_{VP} \cdot S \cdot T_W}$$

$$T_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} S_X & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_x = \frac{0.6}{8}$$

$$S_y = \frac{0.4}{6}$$



$$T_{VP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ & 0 \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.0649 & 0.0333 & 0.0201 \\ -0.0375 & 0.0577 & 0.3348 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 6

- Pronaći koordinate tačke `P(5,1,-9)` iz k.s. sveta u k.s. normalizovanog uređaja (NDC) nakon projekcije, ukoliko se k.s. kamere poklapa sa k.s. sveta i ukoliko su parametri `glFrustum` funkcije bili sledeći:

$l = -5$

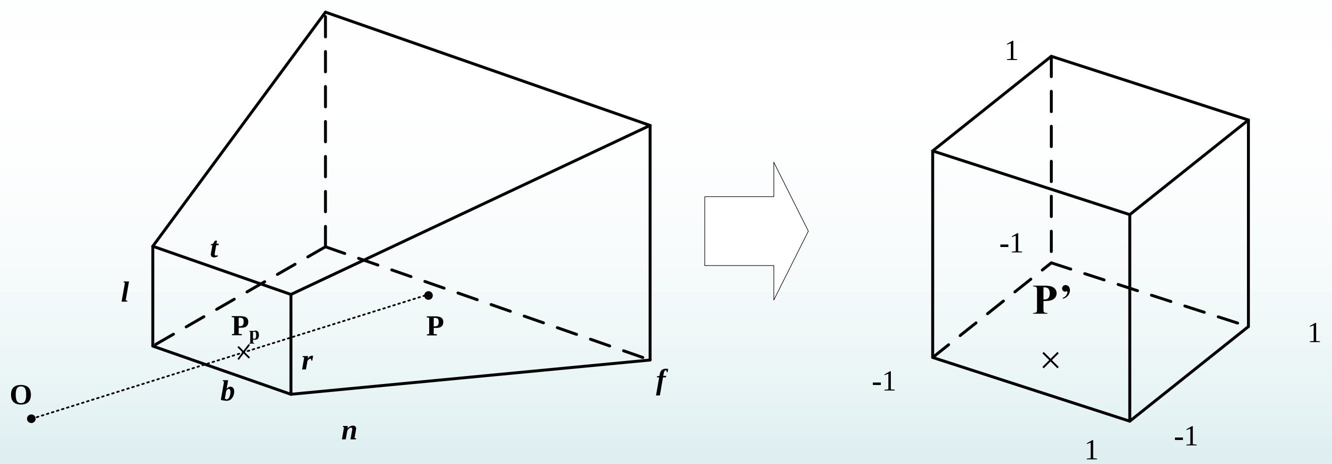
$r = 5$

$b = -5$

$t = 5$

$n = 1$

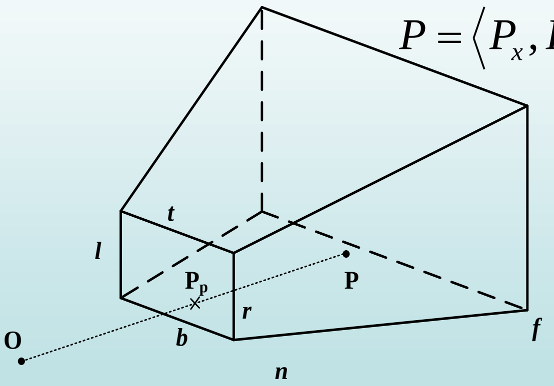
$f = 10$

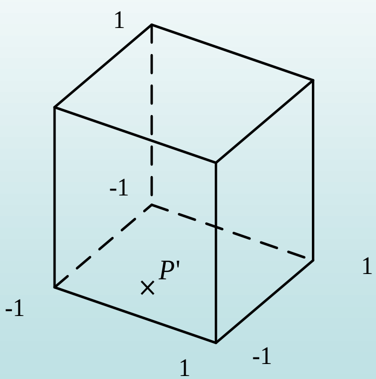


Zadatak 6 – rešenje (1/3)

- Kamera je u koordinatnom početku i gleda u negativnom smeru z ose.
- Potrebno je pronaći koordinate tačke P’
    1. Pronađe se P_p, odnosno projekcija tačke P na bližoj strani odsecanja (*near clipping plane*)
    2. Komponente **x’** i **y’** tacke P’ se dobijaju linearnom transformacijom komponenti x_p i y_p tačke P_p, dok se **z’** komponenta tacke P’ dobija linearnom transformacijom recipročne vrednosti z komponente originalne tacke P
    3. Na osnovu 2. se dobija matrica projekcije, kojom se tačka P preslikava u *homogeni prostor odsecanja* (w komponenta projekcije je dubina tačke P u k.s. kamere)
    4. Na kraju se koordinate dele sa *w* komponentom, čime projekcija tačke P dospeva u normalizovani prostor odsecanja ili NDC (ovo radi hardver!)

$$P = \left\langle P_x, P_y, P_z, 1 \right\rangle$$





$$\mathbf{P}' = \mathbf{M}_{PROJ} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 6 – rešenje (2/3)

- Postupak dobijanja matrice projekcije

$$x_p = -\frac{n}{P_z} P_x \qquad y_p = -\frac{n}{P_z} P_y$$

Linearno preslikavanje

$$x' = 2\frac{x_p - l}{r - l} - 1 \qquad y' = 2\frac{y_p - b}{t - b} - 1$$

Smena

$$x' = \frac{2n}{r-l}\left(-\frac{P_x}{P_z}\right) - \frac{r+l}{r-l} \qquad y' = \frac{2n}{t-b}\left(-\frac{P_y}{P_z}\right) - \frac{t+b}{t-b}$$

$$z' = \frac{A}{z} + B$$

$z=-n, z'=-1$

$z=-f, z'=1$

Recipročno preslikavanje

$$z' = -\frac{2nf}{f-n}\left(-\frac{1}{P_z}\right) + \frac{f+n}{f-n}$$

$$-x'P_z = \frac{2n}{r-l}P_x + \frac{r+l}{r-l}P_z$$

$$-y'P_z = \frac{2n}{t-b}P_y + \frac{t+b}{t-b}P_z$$

$$-z'P_z = -\frac{f+n}{f-n}P_z - \frac{2nf}{f-n}$$

$$\boxed{\mathbf{P}' = \mathbf{M}_{PROJ} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Zadatak 6 - rešenje (2/2)

- Konkretna primena dobijene matrice projekcije

P(5,1,-9)

$l = -5$

$r = 5$

$t = 5$

$b = -5$

$n = 1$

$f = 10$

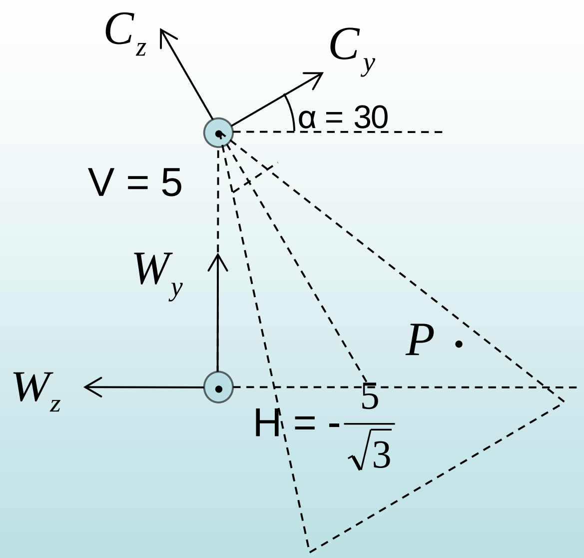
$$P_h' = M_{PROJ} \cdot P = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_h' = M_{PROJ} \cdot P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{9} & -\frac{20}{9} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{9} \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{P' = \left\langle \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{45}, \quad -\frac{2}{81}, \quad 1 \right\rangle}$$

Zadatak 7

- Pronaći koordinate tačke `P(0,1,-5)` iz k.s. sveta u NDC sistemu nakon projekcije, ukoliko je k.s. kamere pozicioniran u k.s. sveta pozivom `gluLookAt(0,5,0,  0,0,` $-\frac{5}{\sqrt{3}}$ `,  0,1,0)` i ukoliko je vidljivi prostor kamere postavljen pozivom `glFrustum(-1,1,  1,-1,  1,10).`



Zadatak 7 – rešenje

1. Matrica preslikavanja k.s. sveta u k.s. kamere

$$M_{view}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha & -V\cdot\sin\alpha\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & -V\cdot\cos\alpha\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & -0.866 & -2.5\\ 0 & 0.866 & 0.5 & -4.33\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

2. Matrica projekcije

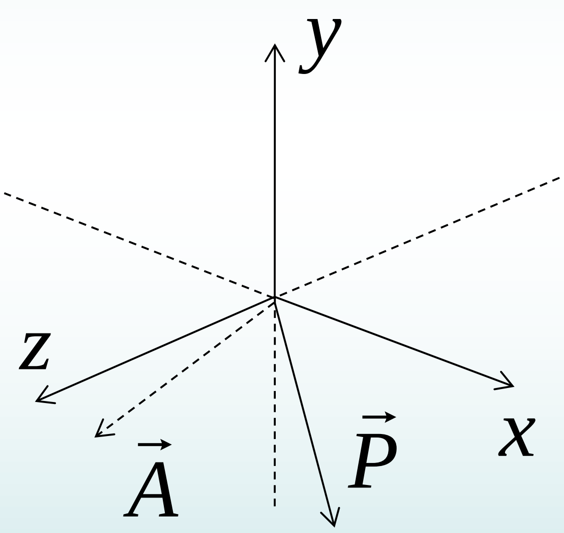
$$M_{PROJ}=\begin{bmatrix}\frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0\\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n}\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{11}{9} & -\frac{20}{9}\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$P_H=M_{PROJ}\cdot M_{VIEW}\cdot P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & -0.866 & -2.5\\ 0 & -1.057 & -0.61 & 3.063\\ 0 & -0.866 & -0.5 & 4.33\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -5\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 2.33\\ 5.06\\ 5.96\end{bmatrix}$$

$$\boxed{P_P=\begin{bmatrix}0\\ 0.391\\ 0.849\\ 1\end{bmatrix}}$$

Zadatak 8

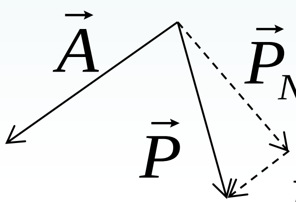
- Pronaći matricu rotacije koja rotira objekat oko ose zadate jediničnim vektorom A(-0.25, -0.433, 0.866) za ugao 75° u pozitivnom matematičkom smeru.



- Problem će najpre biti rešen u opštem slučaju, kada je potrebno rotirati tačku **P** za ugao **φ** u pozitivnom mat. smeru oko ose čiji je pravac određen jediničnim vektorom **A**

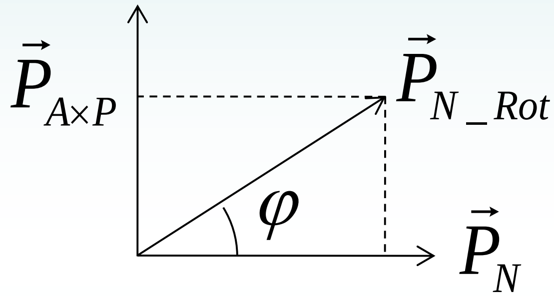
Zadatak 8 – rešenje (1/3)

- Projektovanjem vektora **P** na osu određenu vektorom **A**, vidi se da je potrebno je pronaći samo rotaciju normalne komponente, dok se paralelna komponenta sabira nepromenjena.



$$\vec{P}_N = \vec{P} - (\vec{A} \cdot \vec{P}) \cdot \vec{A}$$

$$\vec{P}_P = (\vec{A} \cdot \vec{P}) \cdot \vec{A}$$



- Rotacija vektora $\mathbf{P_N}$ za ugao $\boldsymbol{\varphi}$ oko ose **A** se dobija kao linearna kombinacija vektora $\mathbf{P_N}$ i vektora $\mathbf{P_{AxP}}$ dobijenog rotacijom vektora $\mathbf{P_N}$ oko ose **A** za ugao od **90°** u supr. smeru od kretanja kazaljke časovnika.

$$\vec{P}_{N\_Rot} = \vec{P}_N \cdot \cos\varphi + \vec{P}_{A \times P} \cdot \sin\varphi = (\vec{P} - (\vec{A} \cdot \vec{P}) \cdot \vec{A}) \cdot \cos\varphi + (\vec{A} \times \vec{P}) \cdot \sin\varphi$$

Zadatak 8 – rešenje (2/3)

- Iz poslednjeg sledi celokupni izraz rotiranog vektora **P**

$$\vec{P}_{Rot} = \vec{P}_P + \vec{P}_{N\_Rot} = (\vec{A}\cdot\vec{P})\cdot\vec{A} + (\vec{P} - (\vec{A}\cdot\vec{P})\cdot\vec{A})\cdot\cos\varphi + (\vec{A}\times\vec{P})\cdot\sin\varphi$$
$$= \vec{P}\cdot\cos\varphi + (\vec{A}\times\vec{P})\cdot\sin\varphi + \vec{A}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{P})\cdot(1-\cos\varphi)$$

- Primenom matrične predstave gornji izraz je ekvivalentan sledećem

$$P_{Rot} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot P\cdot\cos\varphi + \begin{bmatrix} 0 & -A_z & A_y \\ A_z & 0 & -A_x \\ -A_y & A_x & 0 \end{bmatrix}\cdot P\cdot\sin\varphi + \begin{bmatrix} A_x^2 & A_x\cdot A_y & A_x\cdot A_z \\ A_x\cdot A_y & A_y^2 & A_yA_z \\ A_x\cdot A_z & A_y\cdot A_z & A_z^2 \end{bmatrix}\cdot P\cdot(1-\cos\varphi)$$

- Odakle sledi matrica rotacije ($c=\cos\varphi, s=\sin\varphi$)

$$R_A(\varphi) = \begin{bmatrix} c+(1-c)\cdot A_x^2 & (1-c)\cdot A_xA_y - s\cdot A_z & (1-c)\cdot A_xA_z + s\cdot A_y \\ (1-c)\cdot A_xA_y + s\cdot A_z & c+(1-c)\cdot A_y^2 & (1-c)\cdot A_yA_z - s\cdot A_x \\ (1-c)\cdot A_xA_z - s\cdot A_y & (1-c)\cdot A_yA_z + s\cdot A_x & c+(1-c)\cdot A_z^2 \end{bmatrix}$$

Zadatak 8 – rešenje (3/3)

$$R_A(\varphi)=\begin{bmatrix} c+(1-c)\cdot A_x^2 & (1-c)\cdot A_xA_y-s\cdot A_z & (1-c)\cdot A_xA_z+s\cdot A_y \\ (1-c)\cdot A_xA_y+s\cdot A_z & c+(1-c)\cdot A_y^2 & (1-c)\cdot A_yA_z-s\cdot A_x \\ (1-c)\cdot A_xA_z-s\cdot A_y & (1-c)\cdot A_yA_z+s\cdot A_x & c+(1-c)\cdot A_z^2 \end{bmatrix}$$

- Zamenom konkretnih vrednosti u opštu formulu dobija se matrica tražena u zadatku (A (-0.25, -0.433, 0.866) , φ=60°)

A_x^2	A_y^2	A_z^2	A_xA_y	A_xA_z	A_yA_z
0.063	0.187	0.75	0.108	-0.217	-0.375

c	*s*
0.5	0.866

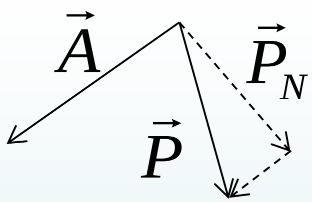
$$R_A(60^\circ)=\begin{bmatrix} 0.531 & -0.7 & -0.483 \\ 0.804 & 0.594 & 0.029 \\ 0.266 & -0.404 & 0.875 \end{bmatrix}$$

Zadatak 8

- Izvesti matricu skaliranja duž proizvoljne ose

Ideja je slična kao u prethodnom zadatku.

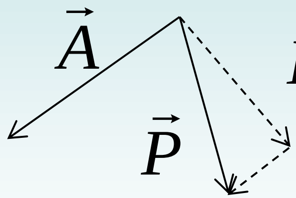
Na slici je prikazana osa određena vektorom **A**
i neka tačka **P** treba da se skalira **s** puta duž te ose.



$$\vec{P}_N = \vec{P} - (\vec{A} \cdot \vec{P}) \cdot \vec{A}$$

$$\vec{P}_P = (\vec{A} \cdot \vec{P}) \cdot \vec{A}$$

Zadatak 8 - rešenje



$$\vec{P}_N = \vec{P} - (\vec{A}\cdot\vec{P})\cdot\vec{A}$$

$$\vec{P}_P = (\vec{A}\cdot\vec{P})\cdot\vec{A}$$

Skaliranje duž ose **A** će uticati samo na komponentu **P**$\mathbf{P_p}$.
Prema tome, tačka **P** će nakon skaliranja da se transformiše u tačku **P'** na sledeći način:

$$\vec{P}' = \vec{P}_N + \vec{P}_P' = \vec{P}_N + \vec{P}_P \cdot s =$$

$$\vec{P} - (\vec{A}\cdot\vec{P})\cdot\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{P})\cdot\vec{A}\cdot s = \vec{P} + (s-1)\cdot(\vec{A}\cdot\vec{P})\cdot\vec{A} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\vec{P} + (s-1)\cdot\begin{bmatrix} A_x^2 & A_x A_y & A_x A_z \\ A_x A_y & A_y^2 & A_y A_z \\ A_x A_z & A_y A_z & A_z^2 \end{bmatrix}\cdot\vec{P}$$

Zadatak 9

- Pronaći matricu skaliranja duž osa drugog k. s. čiji su jedinični vektori pravca u tekućem k. s.
  $S_x(0.866,\ 0.433,\ -0.25)$
  $S_y(-0.5,\ 0.75,\ -0.433)$
  $S_z(0,\ 0.5,\ 0.866)$.
  Faktor skaliranja duž x ose je 2, dok je duž y ose 3.

$$M = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.433 & 0.75 & 0.5 & 0 \\ -0.25 & -0.433 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.433 & -0.25 & 0 \\ -0.5 & 0.75 & -0.433 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_S = M^{-1} \cdot S \cdot M = \begin{bmatrix} 2.125 & 0.217 & 0.433 & 0 \\ 0.217 & 2.375 & 0.750 & 0 \\ 0.433 & 0.750 & 1.500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Literatura

- Eric Langel, Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics