Računarska grafika 2

Transformacije u 2D i 3D grafici

Elementarne transformacije u 3D grafici

- Koristi se konvencija pokretnog **objekta** i **matrice kolona**

Translacija

Objekat se pomera za vektor $\vec{T}(x_T, y_T, z_t)$

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_T \\ 0 & 1 & 0 & y_T \\ 0 & 0 & 1 & z_T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacija

Objekat rotira oko X ose za ugao α, oko Y ose za ugao β i oko Z ose za ugao γ. Pozitivan smer rotacije je nasuprot kretanja kazaljke časovnika.

$$M_{R_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ 0 & sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M_{R_y} = \begin{bmatrix} cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_z} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elementarne transformacije u 3D grafici

<u>Skaliranje</u>

Faktori skaliranja po X, Y i Z osi: S_X , S_Y , S_Z

$$M_T = \begin{bmatrix} S_X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Transformacije u 2D prostoru su slične, samo je potrebno ukloniti 3. vrstu i 3. kolonu priloženih matrica

Zadatak 1

U X-Y koordinatnom sistemu trougao je određen temenima: A(2,6), B(4,6) i C(3,8). Ukoliko se objekat translatorno pomeri za vektor O1(-1,-1), zatim rotira u smeru kretanja kazaljke na časovniku za ugao 30° i konačno skalira faktorima za X-osu Sx=2, odnosno Y-osu: Sy=1, odrediti:

- kompozitnu matricu transformacije
- nove koordinate datog trougla

Zadatak 1 – rešenje (1/2)

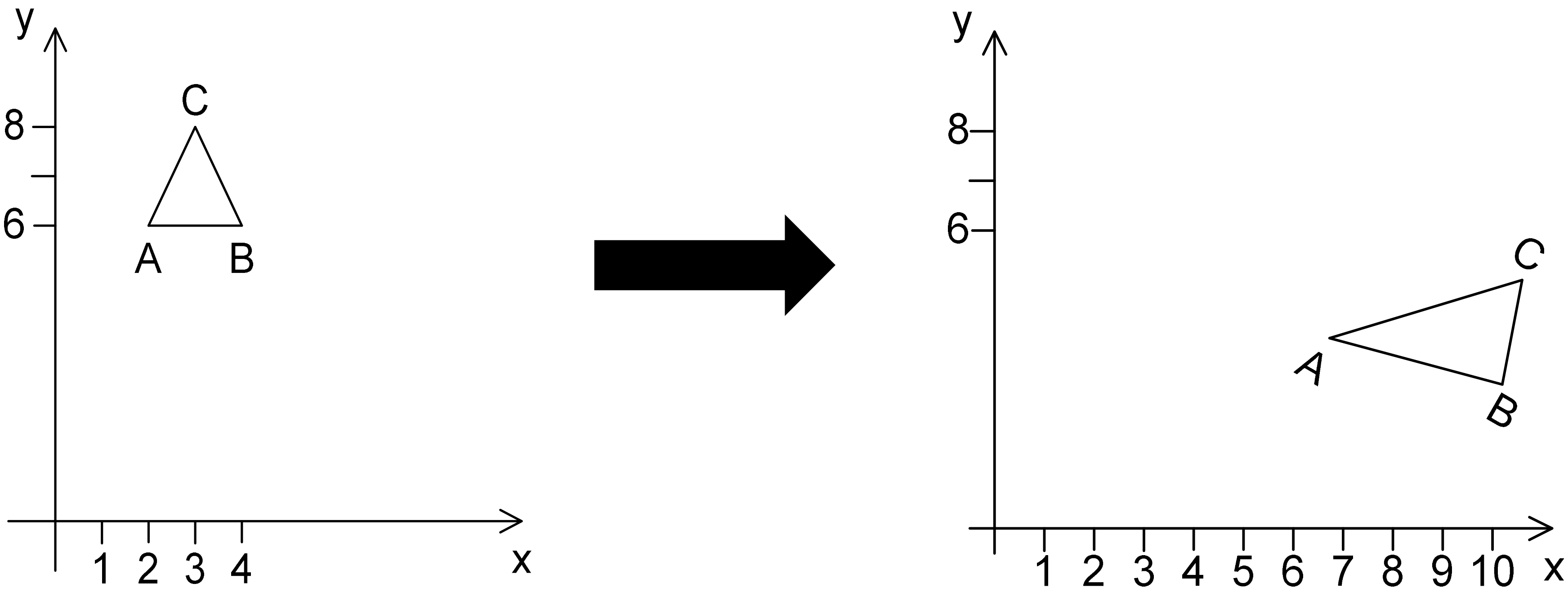
Matrice elementarnih transformacija su:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ & 0 \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kompozitna matrica je:

$$M = S \cdot R \cdot T = \begin{bmatrix} 1.732 & 1 & -2.732 \\ -0.5 & 0.866 & -0.366 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 1 – rešenje (2/2)



$$A' = M \cdot A = \begin{bmatrix} 6.732 \\ 3.83 \\ 1 \end{bmatrix} B' = M \cdot B = \begin{bmatrix} 10.196 \\ 2.83 \\ 1 \end{bmatrix} C' = M \cdot C = \begin{bmatrix} 10.464 \\ 5.062 \\ 1 \end{bmatrix}$$

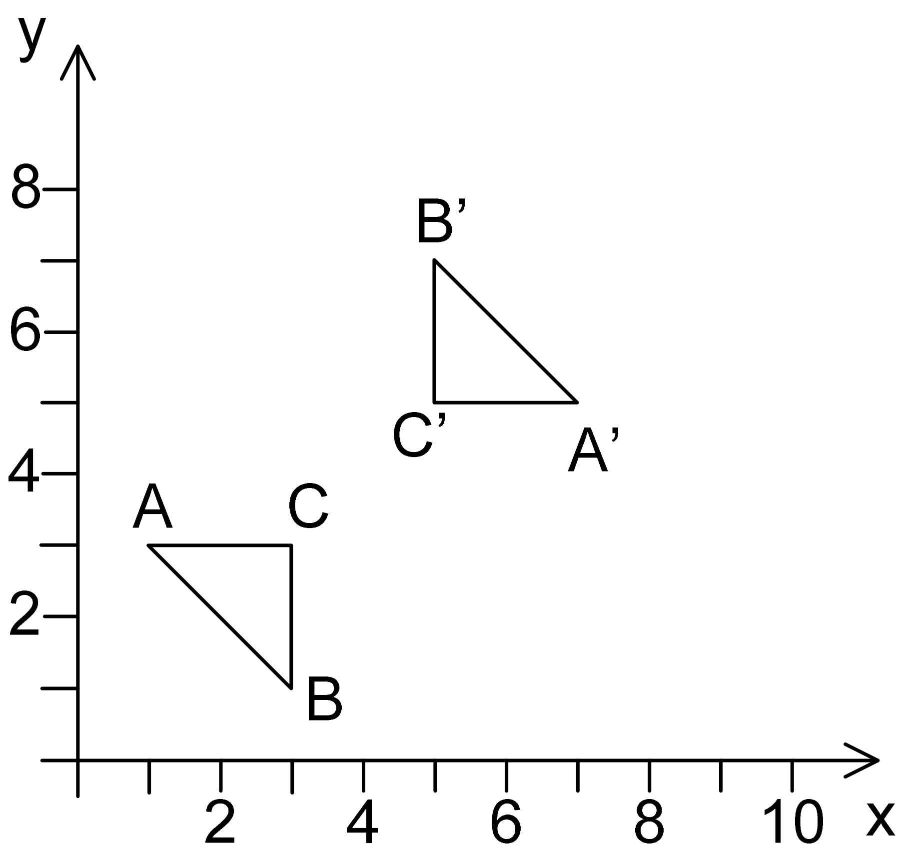
Zadatak 2

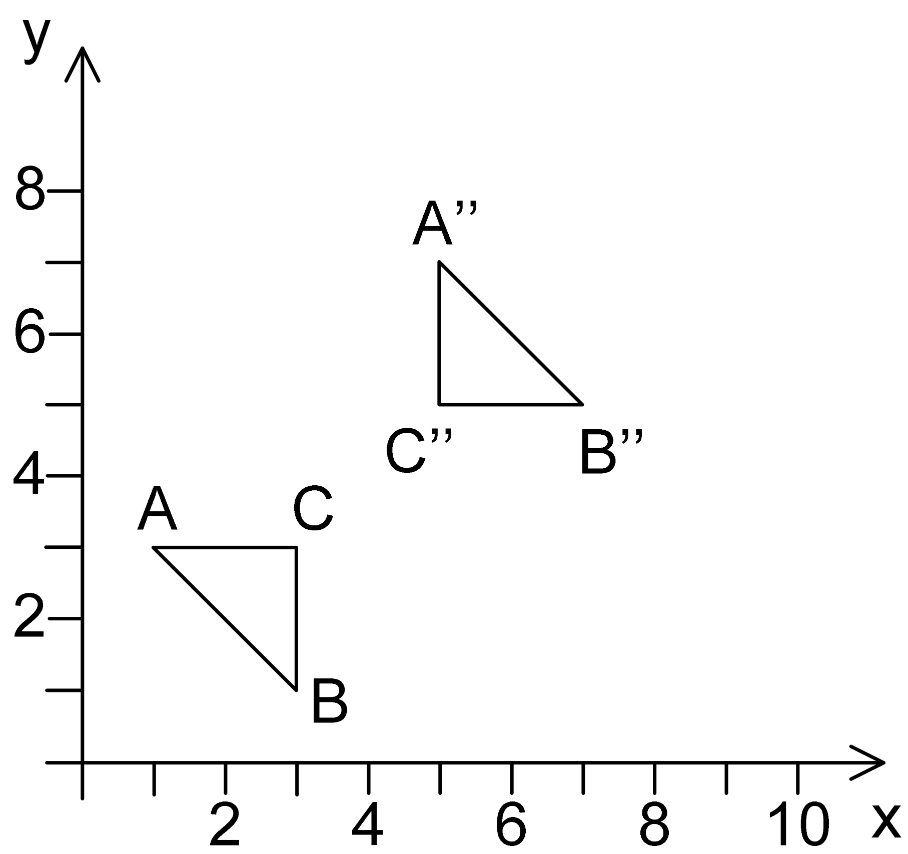
Trougao ABC nalazi se na ekranu u položaju definisanom koordinatama tačaka A(1,3), B(3,1), C(3,3). Koordinatni početak se nalazi u levom donjem uglu ekrana.

Odrediti kompozitnu matricu transformacija pokretnog objekta tako da se promeni položaja trougla ABC u položaj:

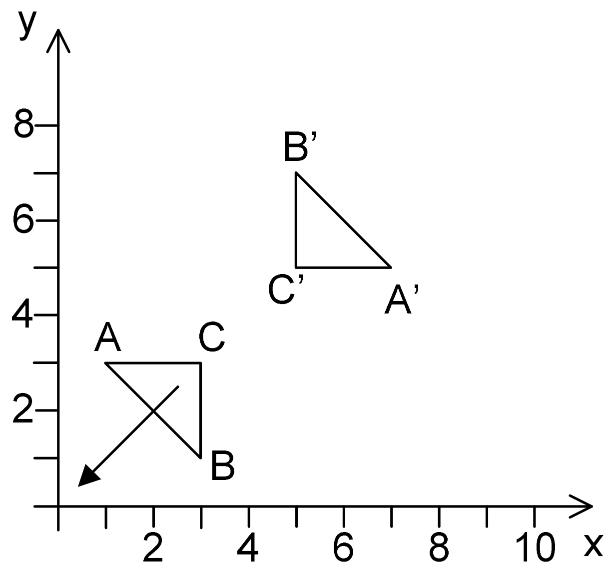
- A′B′C′, gde su koordinate tačaka A′(7,5), B′(5,7), C′(5,5)
- A″B″C″, gde su koordinate tačaka A″(5,7), B″(7,5), C″(5,5)

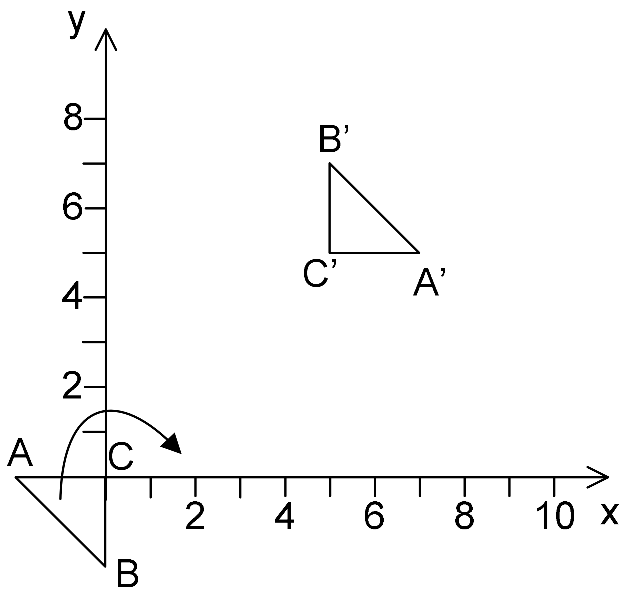
Zadatak 2

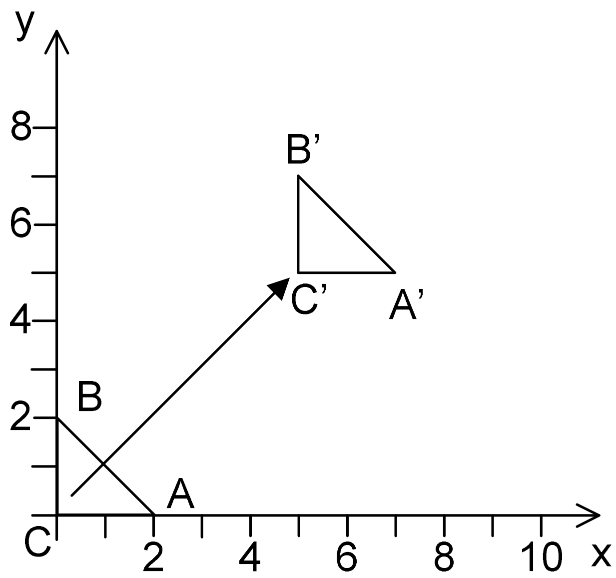




Zadatak 2 – rešenje (1/2)



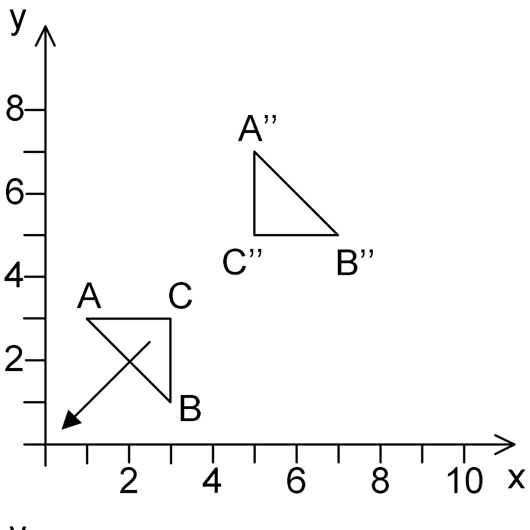


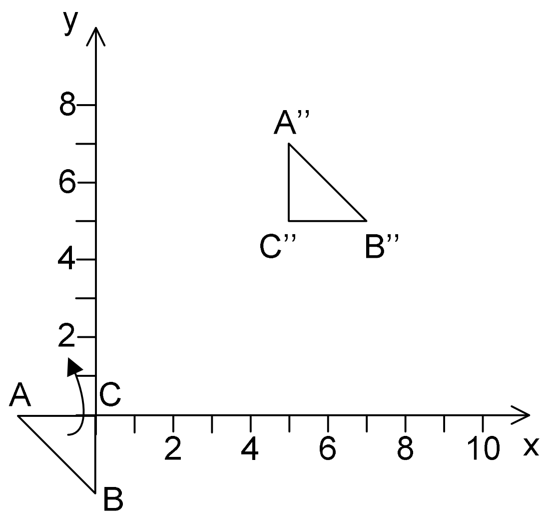


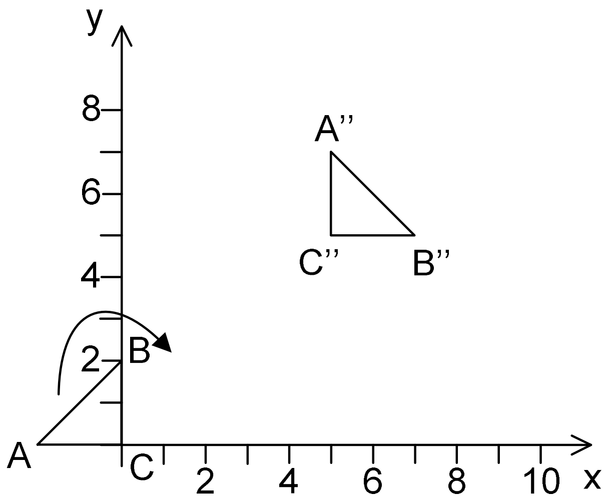
1. Translacija objekta tako da teme C bude u koordinatnom početku
2. Rotacija objekta u smeru kretanja kazaljke na časovniku za ugao $\alpha=\pi$
3. Translacija temena C u tačku (5,5)

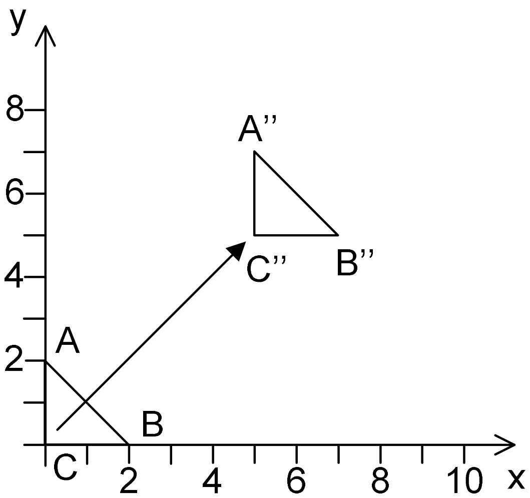
$$M = T_2 \cdot R \cdot T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 2 – rešenje (2/2)







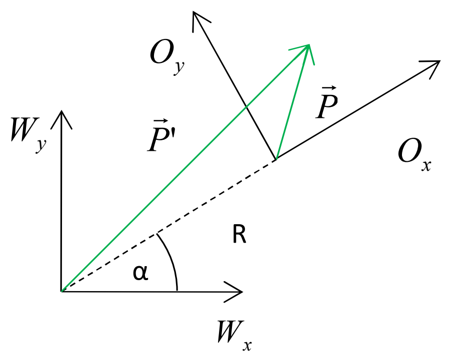


1. Translacija objekta tako da je teme C u koord. početku
2. Refleksija prema X-osi
3. Rotacija objekta u smeru kretanja kazaljke za ugao α=90°
4. Translacija temena C u tačku (5,5).

$$M = T_2 \cdot R \cdot O_x \cdot T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 3

Ukoliko je tačka P određena vektorom (x, y, z) u koordinatnom sistemu objekta, pronaći koordinate iste tačke u koordinatnom sistemu sveta (*world space*). Na slici dole je prikazan položaj ova dva koordinatna sistema.



Potrebno je pronaći matricu transformacije, M, koja "poravnava" sistem objekta u sistem sveta

$$P' = M \cdot P$$

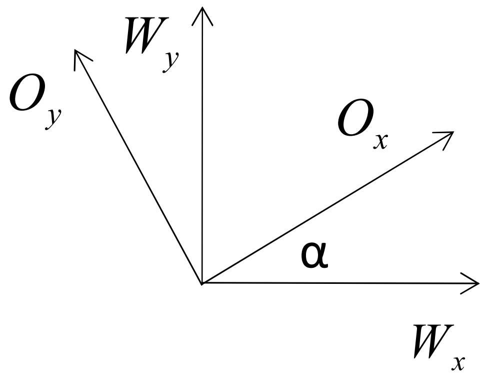
Postoje dva načina razmišljanja:

Prvi je da se pođe od situacije da su k.s. bili preklopljeni, a da je onda k.s. sveta dospeo u datu poziciju translacijom i rotacijom. Iz perspektive k.s. sveta to izgleda kao da se tačka P pomerala, pa su i matrice transformacije u skladu sa konvencijom pokretnog objekta

$$M = R \cdot T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & R \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & R\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & R\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 3 – rešenje

Drugi način je da pronađemo vektore $\overrightarrow{O_x}$ i $\overrightarrow{O_y}$ (i $\overrightarrow{O_z}$) kao i vektor translacije koordinatnog početka k. s. modela u k. s. sveta. Na osnovu toga se direktno dobija matrca transformacije.

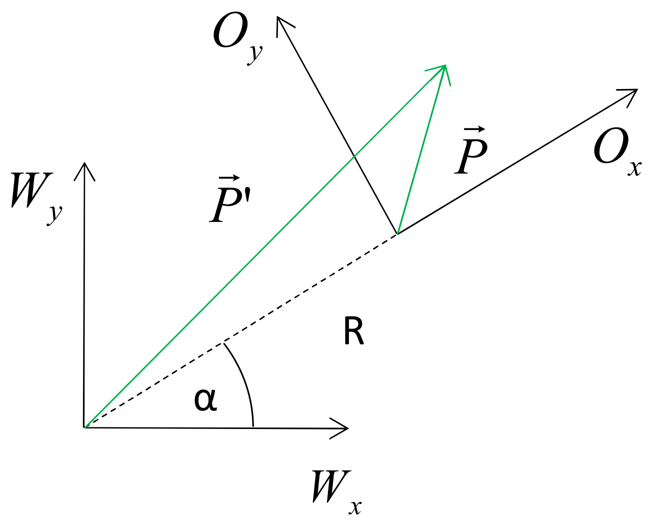


$$\begin{bmatrix} Proj_{W_x}(O_x) & Proj_{W_x}(O_y) & Proj_{W_x}(O_z) & T_x \\ Proj_{W_y}(O_x) & Proj_{W_y}(O_y) & Proj_{W_y}(O_z) & T_y \\ Proj_{W_Z}(O_x) & Proj_{W_Z}(O_y) & Proj_{W_Z}(O_z) & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{gathered} Proj_w(O_x) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0) \\ Proj_w(O_y) = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha), 0) \\ Proj_w(O_z) = (0,0,1) \\ T(R * \cos(\alpha), R * \sin(\alpha), 0) \end{gathered} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & R\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & R\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 4

Pronaći matricu transformacije koja preslikava k.s. sveta u k.s. objekta iz prethodnog zadatka.



Jedan način je da se traže projekcije k.s. sveta u k.s. objekta

Drugi način je da se pronađe inverz matrice M iz prethodnog zadatka

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & R\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & R\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 4 – rešenje

- Za ortonormalne matrice važi da je $M^{-1} = M^{T}$
- Matrica je ortonormalna ukoliko su vektori kolona međusobno ortogonalni i imaju jedinične dužine
- Matrica M nije ortonormalna pa mora drukčije da se traži inverz matrice M
- Podmatrica Mp jeste ortonormalna

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & R\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & R\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_P & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

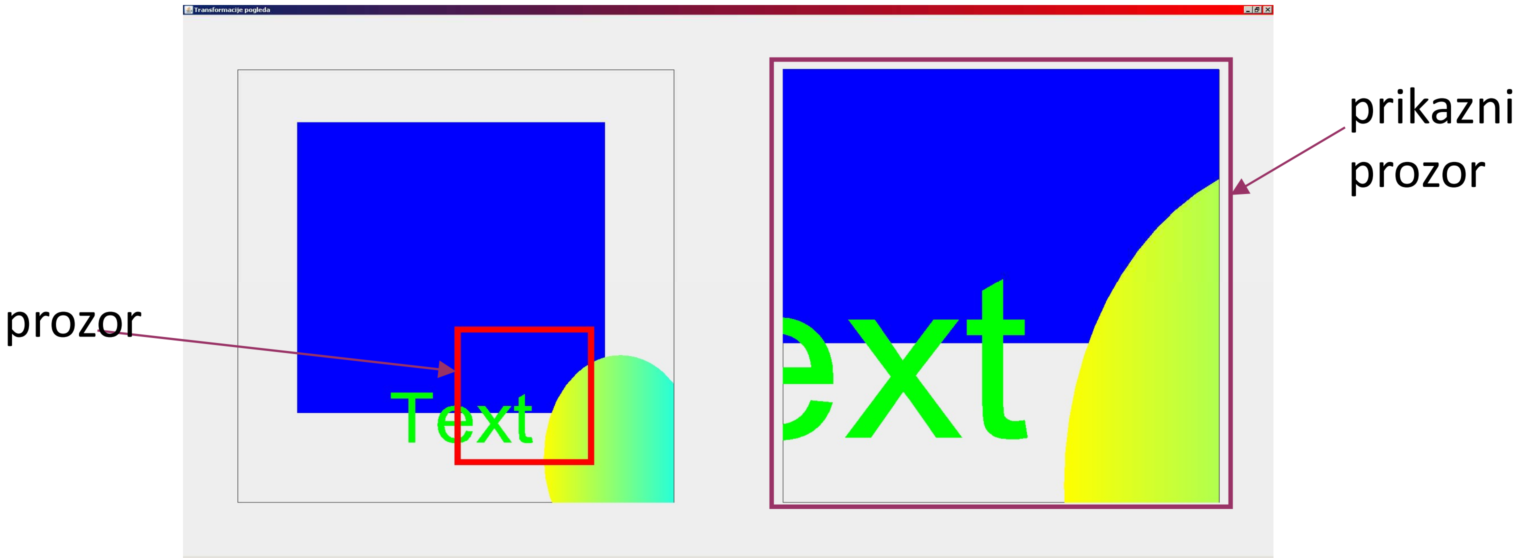
$$P' = \begin{bmatrix} M_P & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} = M_P \cdot P + T$$

$$=> M_P^{-1} \cdot (P' - T) = P => M_P^{T} \cdot P' - M_P^{T} \cdot T = P$$

$$=> M^{-1} = \begin{bmatrix} M_P^{T} & -M_P^{T} \cdot T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & -R \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

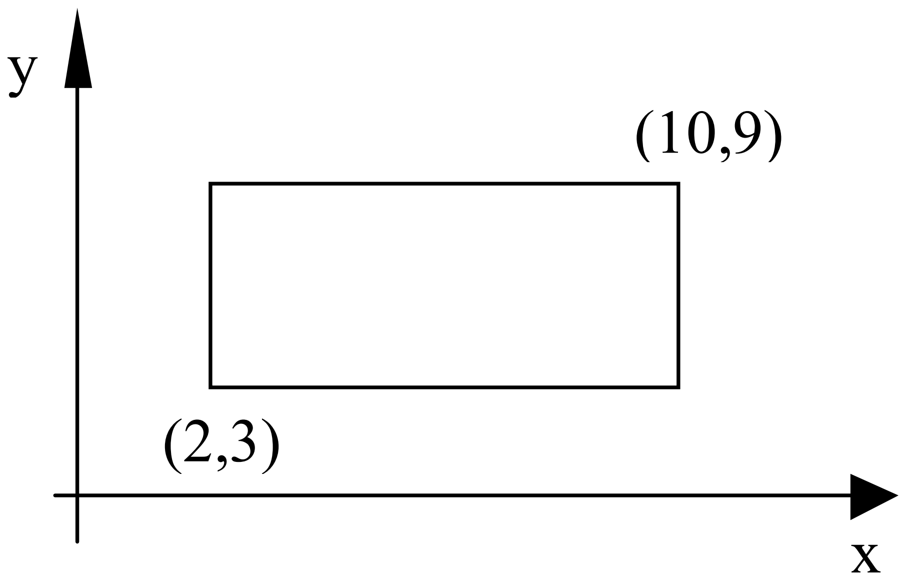
Transformacija prozor → prikazni prozor (window→viewport)

- Obezbeđuje razdvajanje postupka sastavljanja scene od njenog prikazivanja
- *Window* (prozor): određuje deo scene koji se posmatra
- *Viewport* (prikazni prozor): određuje poziciju, veličinu i orijentaciju dela prikazne površi u kojoj se prikazuje deo scene vidljiv u prozoru

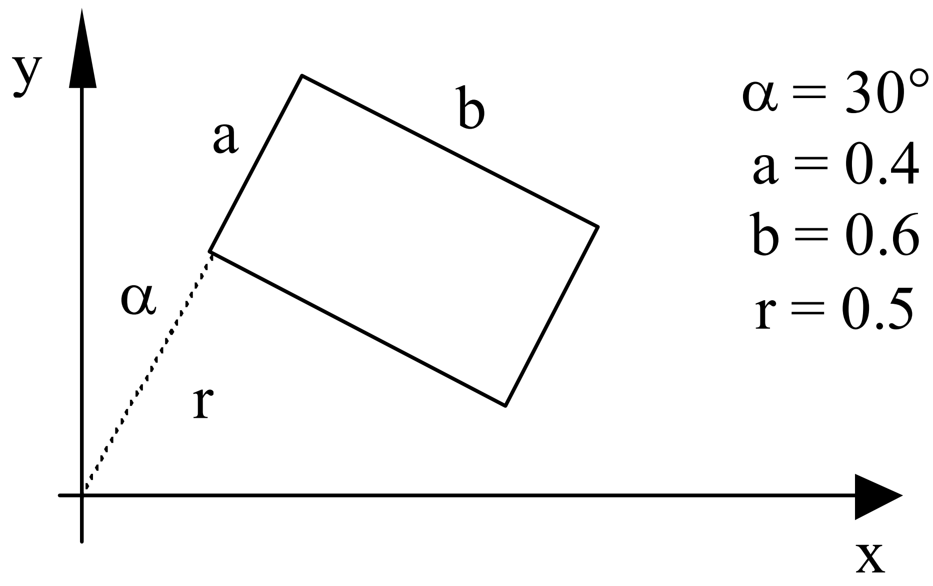


Zadatak 5

Izračunati kompozitnu matricu preslikavanja objekata iz prozora (*Window*) sa slike 1 u prikazni prozor (*Viewport*) na slici 2. Prozor se nalazi u koordinatnom sistemu realnog sveta, a prikazni prozor u normalizovanom koordinatnom sistemu prikaznog uređaja.

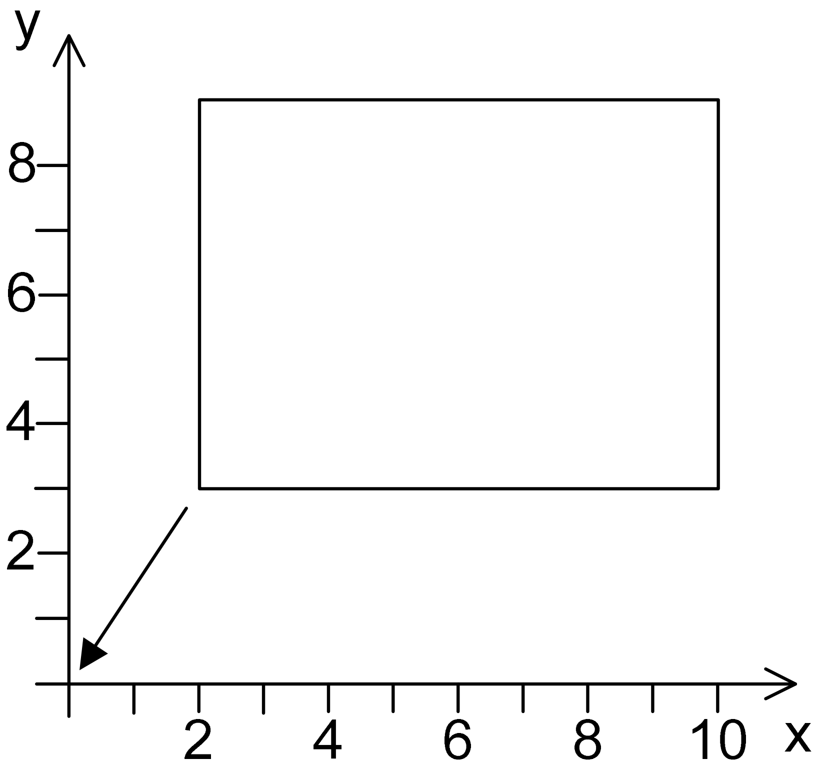


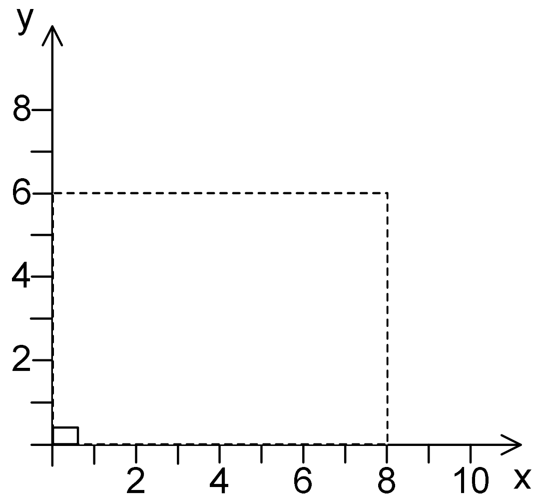
Slika 1



Slika 2

Zadatak 5 – rešenje

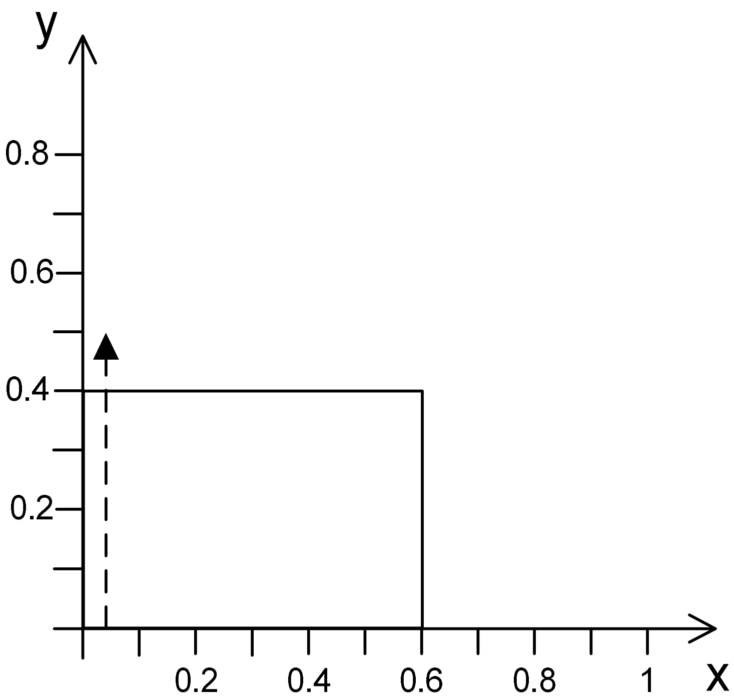


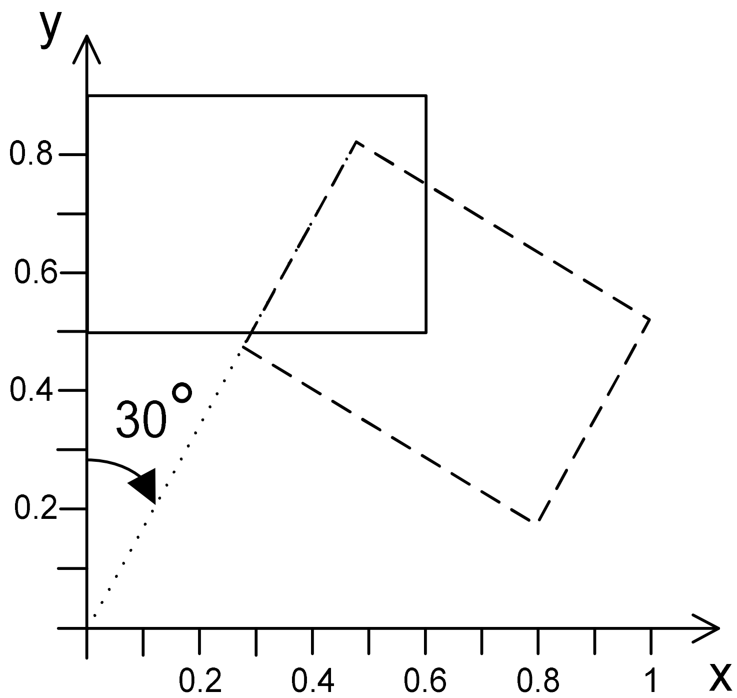


Translacija: donji levi ugao pravougaonika se postavlja u koordinatni početak

Skaliranje: (8,6)⇨(0.6,0.4)

Zadatak 5 – rešenje





Translacija: donji levi ugao pravougaonika se postavlja u (0, r)

Rotacija: oko koordinatnog početka za ugao 30°

Zadatak 5 – rešenje

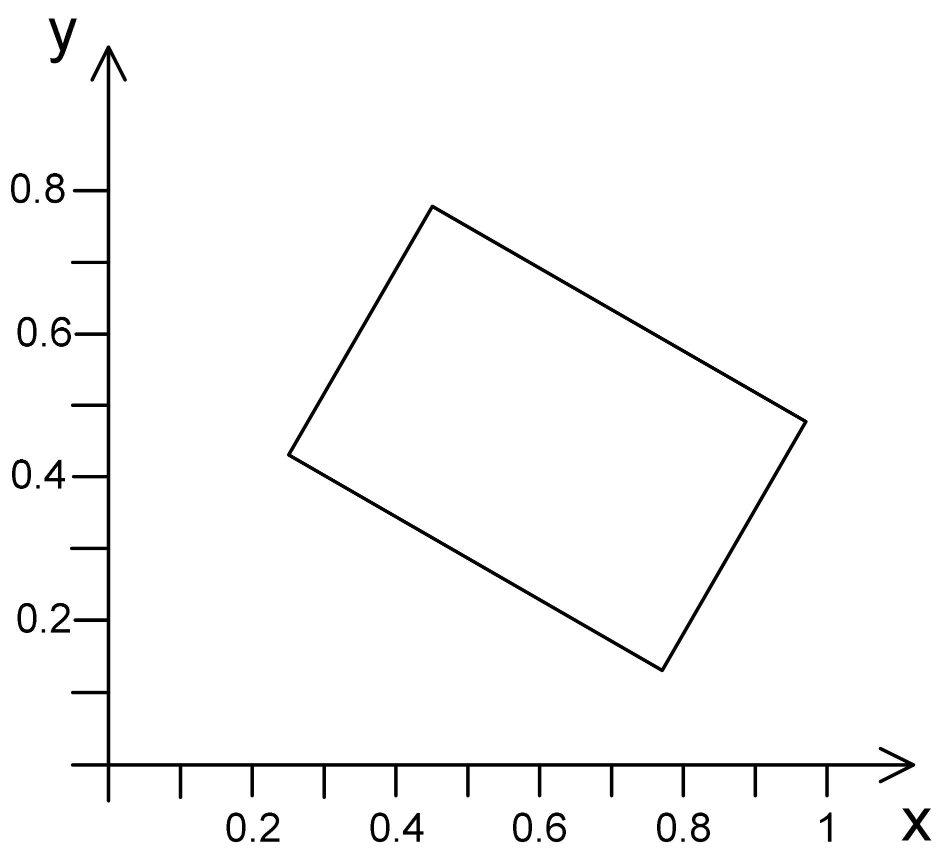
$$M = R \cdot T_{VP} \cdot S \cdot T_W$$

$$T_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_x = \frac{0.6}{8} \quad S_y = \frac{0.4}{6}$$

$$T_{VP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos 30° & \sin 30° & 0 \\ -\sin 30° & \cos 30° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

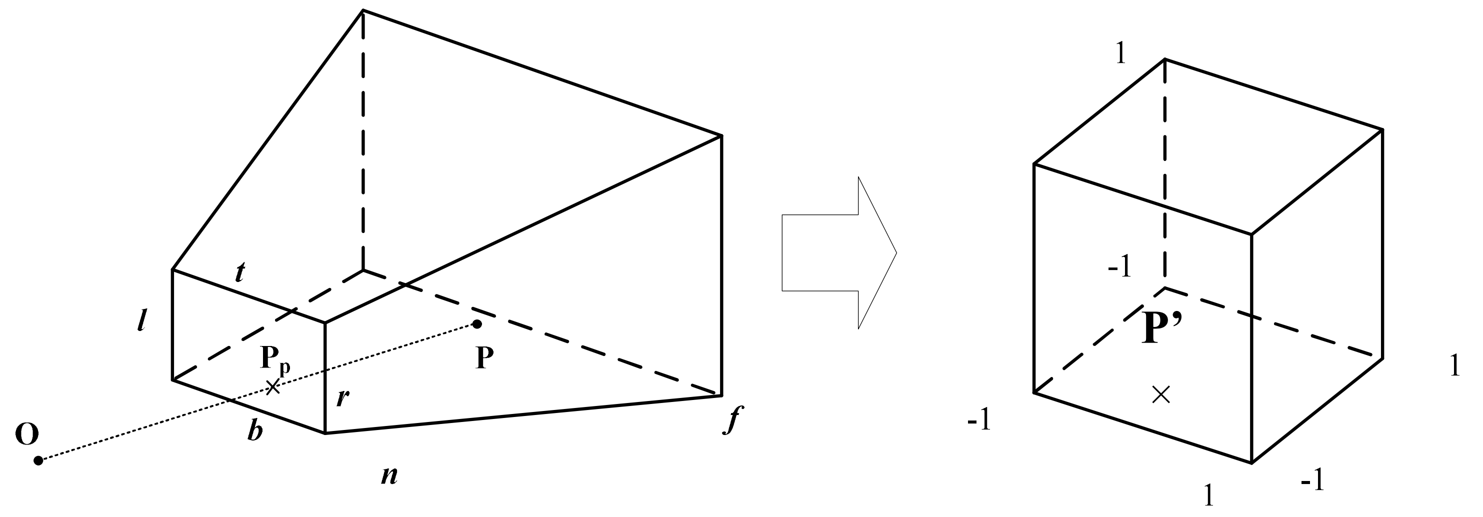


$$M = \begin{bmatrix} 0.0649 & 0.0333 & 0.0201 \\ -0.0375 & 0.0577 & 0.3348 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 6

Pronaći projekciju tačke P(5,1,-9) u normalizovanim koordinatama uređaja (NDC), ukoliko se k.s. kamere poklapa sa k.s. sveta i ukoliko su parametri **`glFrustum`** funkcije bili sledeći:

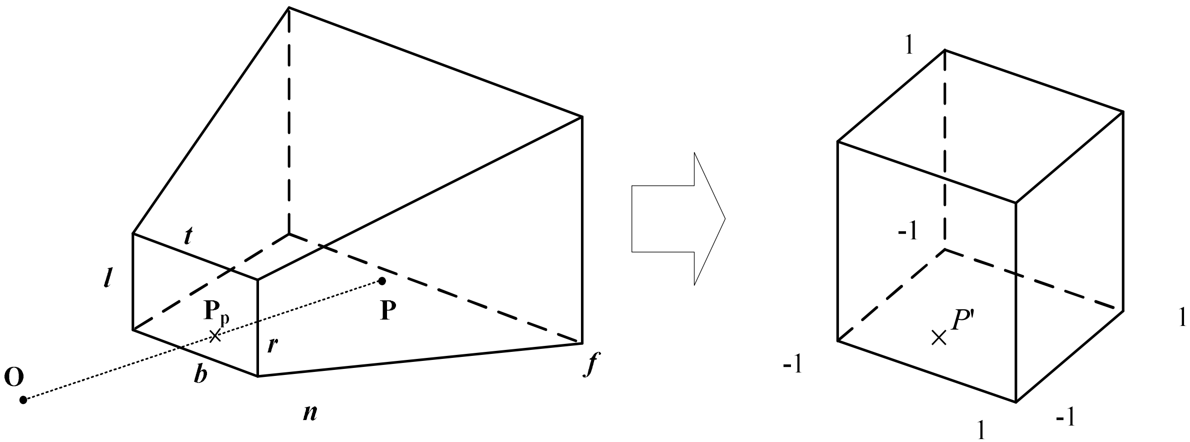
$l = -5$
$r = 5$
$b = -5$
$t = 5$
$n = 1$
$f = 10$



Zadatak 6 – rešenje (1/2)

- Kamera je u koordinatnom početku i gleda u negativnom smeru z ose.
- Potrebno je pronaći koordinate tačke P'
  1. Pronađe se P_p, odnosno projekcija tačke P na bližoj strani odsecanja (*near clipping plane*)
  2. Mapiranjem odsečene piramide u kocku, P_p se preslikava u homogeni prostor odsecanja (*homogeneous clipping space*) i tačku P'
  3. Na kraju se koordinate dele sa *w* komponentom homognizovane tačke P', čime projekcija dospeva u NDC (<u>ovo ne radi programer</u>!)

$$P = \langle P_x, P_y, P_z, 1 \rangle$$



$$\mathrm{P}' = \mathrm{M}_{PROJ} \cdot \mathrm{P} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 6 - rešenje (2/2)

- Konkretna primena dobijene matrice projekcije

$$P'_h = M_{PROJ} \cdot P = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{9} & -\frac{20}{9} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{9} \\ 9 \end{bmatrix}$$

- Nakon perspektivnog deljena

$$P' = \left\langle \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{45}, \quad -\frac{2}{81}, \quad 1 \right\rangle$$

Zadatak 7

Pronaći projekciju tačke P(0,1,-5) u normalizovanim koordinatama uređaja ukoliko je k.s. kamere pozicioniran u k.s. sveta pozivom:

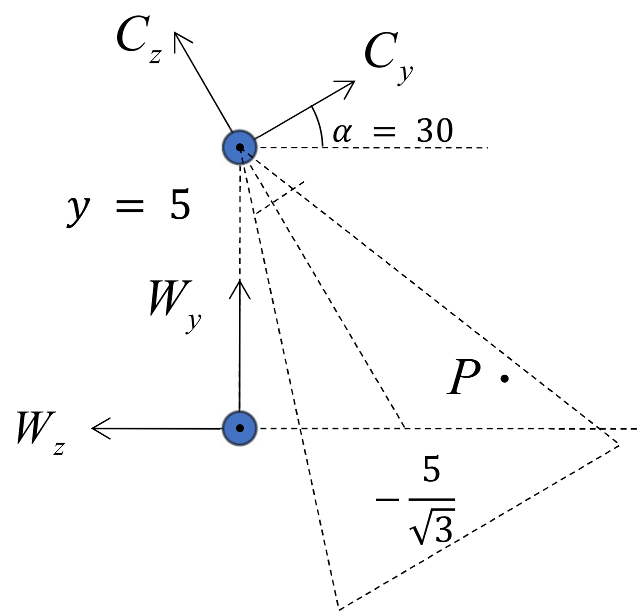
gluLookAt(0,5,0, 0,0,$-\frac{5}{\sqrt{3}}$, 0,1,0)

i ukoliko je vidljivi prostor kamere postavljen pozivom:

glFrustum(-1,1, 1,-1, 1,10).

```
void gluLookAt (
        GLdouble eyeX,
        GLdouble eyeY,
        GLdouble eyeZ,
        GLdouble centerX,
        GLdouble centerY,
        GLdouble centerZ,
        GLdouble upX,
        GLdouble upY,
        GLdouble upZ
)
```

eye -> pozicija kamere
center -> tačka u koju se gleda
up -> up vektor



Zadatak 7 – rešenje

- Matrica preslikavanja k.s. sveta u k.s. kamere

$$M_{view} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha & -V\cdot\sin\alpha \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & -V\cdot\cos\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.866 & -2.5 \\ 0 & 0.866 & 0.5 & -4.33 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrica projekcije

$$M_{PROJ} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{9} & -\frac{20}{9} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

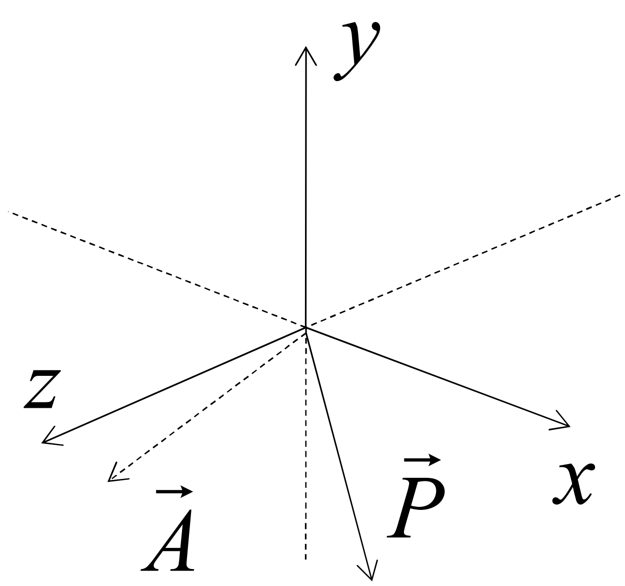
$$P_H = M_{PROJ}\cdot M_{VIEW}\cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.866 & -2.5 \\ 0 & -1.057 & -0.61 & 3.063 \\ 0 & -0.866 & -0.5 & 4.33 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.33 \\ 5.06 \\ 5.96 \end{bmatrix}$$

- Nakon perspektivnog deljenja

$$P_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.391 \\ 0.849 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 8

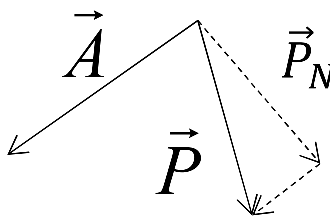
Pronaći matricu rotacije koja rotira vektor P oko ose zadate jediničnim vektorom A(-0.25, -0.433, 0.866) za ugao 75° u pozitivnom matematičkom smeru.



Problem će najpre biti rešen u opštem slučaju, kada je potrebno rotirati tačku **P** za ugao **φ** u pozitivnom smeru oko ose čiji je pravac određen jediničnim vektorom **A**

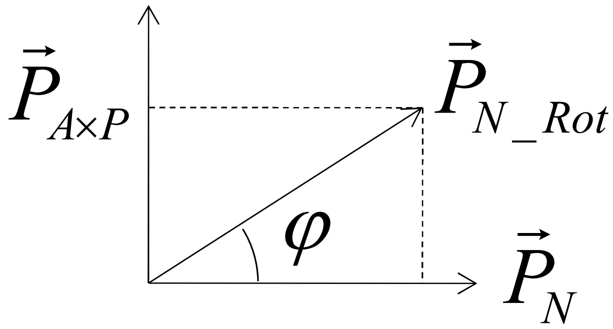
Zadatak 8 – rešenje (1/3)

- Projektovanjem vektora **P** na osu određenu vektorom **A,** vidi se da je potrebno je pronaći samo rotaciju normalne komponente, dok se paralelna komponenta sabira nepromenjena.



$$\vec{P}_N = \vec{P} - \left(\vec{A} \cdot \vec{P}\right) * \vec{A}$$

$$\vec{P}_P = \left(\vec{A} \cdot \vec{P}\right) * \vec{A}$$



- Rotacija vektora $\mathbf{P_N}$ za ugao **φ** oko ose **A** se dobija kao linearna kombinacija vektora $\mathbf{P_N}$ i vektora $\mathbf{P_{AxP}}$ dobijenog rotacijom vektora $\mathbf{P_N}$ oko ose **A** za ugao od **90°** u supr. smeru od kretanja kazaljke časovnika.

$$\vec{P}_{N\_Rot} = \vec{P}_N \cdot \cos\phi + \vec{P}_{A\times P} \cdot \sin\phi = (\vec{P} - (\vec{A} \cdot \vec{P}) \cdot \vec{A}) \cdot \cos\phi + (\vec{A} \times \vec{P}) \cdot \sin\phi$$

Zadatak 8 – rešenje (2/3)

- Iz poslednjeg sledi celokupni izraz rotiranog vektora **P**

$$\vec{P}_{Rot} = \vec{P}_P + \vec{P}_{N\_Rot} = \left(\vec{A}\cdot\vec{P}\right)\cdot\vec{A} + \left(\vec{P} - \left(\vec{A}\cdot\vec{P}\right)\cdot\vec{A}\right)\cdot\cos\phi + \left(\vec{A}\times\vec{P}\right)\cdot\sin\phi =$$
$$= \vec{P}\cdot\cos\phi + (\vec{A}\times\vec{P})\cdot\sin\phi + \vec{A}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{P})\cdot(1-\cos\phi)$$

- Primenom matrične predstave gornji izraz je ekvivalentan sledećem

$$P_{Rot} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot P\cdot\cos\phi + \begin{bmatrix}0 & -A_z & A_y\\ A_z & 0 & -A_x\\ -A_y & A_x & 0\end{bmatrix}\cdot P\cdot\sin\phi + \begin{bmatrix}A_x^2 & A_x\cdot A_y & A_x\cdot A_z\\ A_x\cdot A_y & A_y^2 & A_yA_z\\ A_x\cdot A_z & A_y\cdot A_z & A_z^2\end{bmatrix}\cdot P\cdot(1-\cos\phi)$$

- Odakle sledi matrica rotacije

$$R_A(\phi) = \begin{bmatrix} c + (1-c)\cdot A_x^2 & (1-c)\cdot A_xA_y - s\cdot A_z & (1-c)\cdot A_xA_z + s\cdot A_y\\ (1-c)\cdot A_xA_y + s\cdot A_z & c + (1-c)\cdot A_y^2 & (1-c)\cdot A_yA_z - s\cdot A_x\\ (1-c)\cdot A_xA_z - s\cdot A_y & (1-c)\cdot A_yA_z + s\cdot A_x & c + (1-c)\cdot A_z^2\end{bmatrix}$$

$c = \cos\phi\,, s = \sin\phi$

Zadatak 8 – rešenje (3/3)

$$R_A(\phi) = \begin{bmatrix} c + (1-c)\cdot A_x^2 & (1-c)\cdot A_xA_y - s\cdot A_z & (1-c)\cdot A_xA_z + s\cdot A_y \\ (1-c)\cdot A_xA_y + s\cdot A_z & c + (1-c)\cdot A_y^2 & (1-c)\cdot A_yA_z - s\cdot A_x \\ (1-c)\cdot A_xA_z - s\cdot A_y & (1-c)\cdot A_yA_z + s\cdot A_x & c + (1-c)\cdot A_z^2 \end{bmatrix}$$

- Zamenom konkretnih vrednosti u opštu formulu dobija se matrica tražena u zadatku (A (-0.25, -0.433, 0.866) , φ=60°)

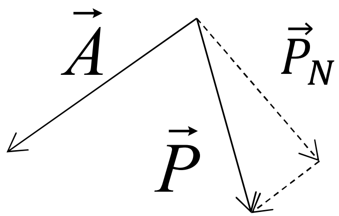
A_x^2	A_y^2	A_z^2	A_xA_y	A_xA_z	A_yA_z	c	s
0.063	0.187	0.75	0.108	-0.217	-0.375	0.5	0.866

$$R_A(60^\circ) = \begin{bmatrix} 0.531 & -0.7 & -0.483 \\ 0.804 & 0.594 & 0.029 \\ 0.266 & -0.404 & 0.875 \end{bmatrix}$$

Zadatak 8

- Izvesti matricu skaliranja duž proizvoljne ose

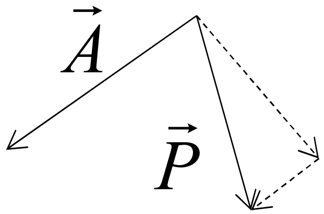
Ideja je slična kao u prethodnom zadatku. Na slici je prikazana osa određena vektorom **A** i neka tačka **P** treba da se skalira **s** puta duž te ose.



$$\vec{P}_N = \vec{P} - (\vec{A} \cdot \vec{P}) \cdot \vec{A}$$

$$\vec{P}_P = (\vec{A} \cdot \vec{P}) \cdot \vec{A}$$

Zadatak 8 - rešenje



$$\vec{P}_N = \vec{P} - (\vec{A} \cdot \vec{P}) \cdot \vec{A}$$

$$\vec{P}_P = (\vec{A} \cdot \vec{P}) \cdot \vec{A}$$

Skaliranje duž ose **A** će uticati samo na komponentu **$\mathbf{P_P}$.** Prema tome, tačka **P** će nakon skaliranja da se transformiše u tačku **P’** na sledeći način:

$$\vec{P}' = \vec{P}_N + \vec{P}_P{}' = \vec{P}_N + \vec{P}_P \cdot s =$$
$$= \vec{P} - (\vec{A} \cdot \vec{P}) \cdot \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{P}) \cdot \vec{A} \cdot s = \vec{P} + (s-1) \cdot (\vec{A} \cdot \vec{P}) \cdot \vec{A} =$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{P} + (s-1) \cdot \begin{bmatrix} A_x^2 & A_x A_y & A_x A_z \\ A_x A_y & A_y^2 & A_y A_z \\ A_x A_z & A_y A_z & A_z^2 \end{bmatrix} \cdot \vec{P}$$

Zadatak 9

Pronaći matricu skaliranja duž osa drugog k. s. čiji su jedinični vektori pravca u tekućem k. s.

$S_x(0.866, 0.433, -0.25)$

$S_y(-0.5, 0.75, -0.433)$

$S_z(0, 0.5, 0.866)$.

Faktor skaliranja duž x ose je 2, dok je duž y ose 3.

$$M = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.433 & 0.75 & 0.5 & 0 \\ -0.25 & -0.433 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M^{-1} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.433 & -0.25 & 0 \\ -0.5 & 0.75 & -0.433 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_S = M^{-1} \cdot S \cdot M = \begin{bmatrix} 2.125 & 0.217 & 0.433 & 0 \\ 0.217 & 2.375 & 0.750 & 0 \\ 0.433 & 0.750 & 1.500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Literatura

- Eric Langel, Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics