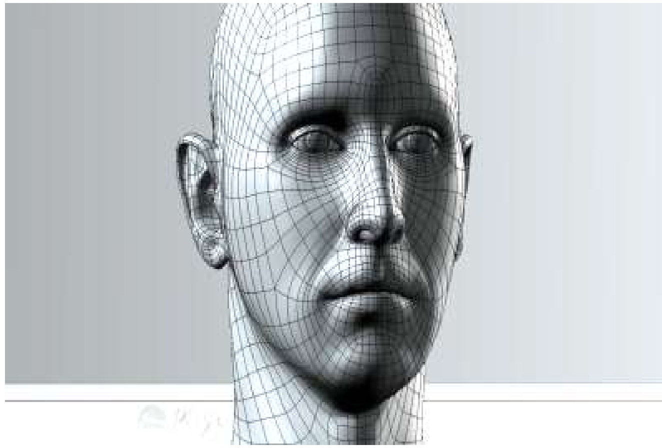
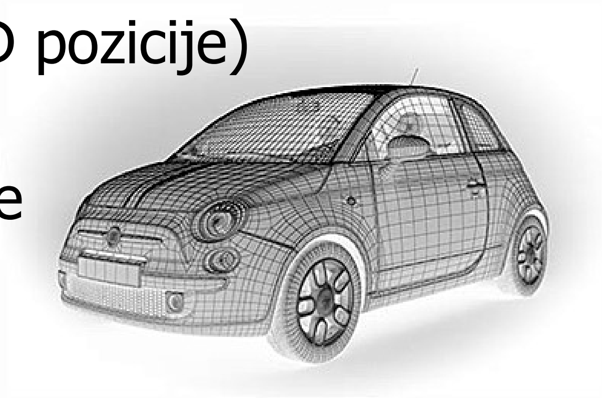
Računarska grafika 2

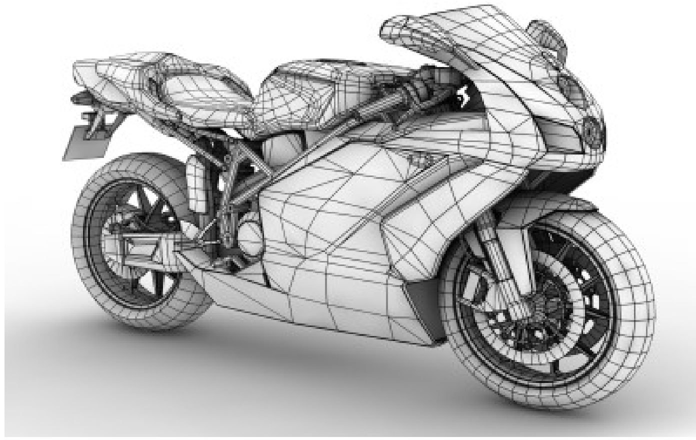
Koordinatni sistemi i transformacije

Predstavljanje objekata



- Načini predstavljanja objekata
  - Egzaktno (matematička formula)
  - Aproksimativno
    - skup/mreža poligona
    - vokseli
- Moderan hardver optimizovan za crtanje/popunjavanje poligona
- Za najjednostavniji vid prikazivanja dovoljna geometrijska definicija
  - skupa temena (3D pozicije)
  - način povezivanja temena u poligone





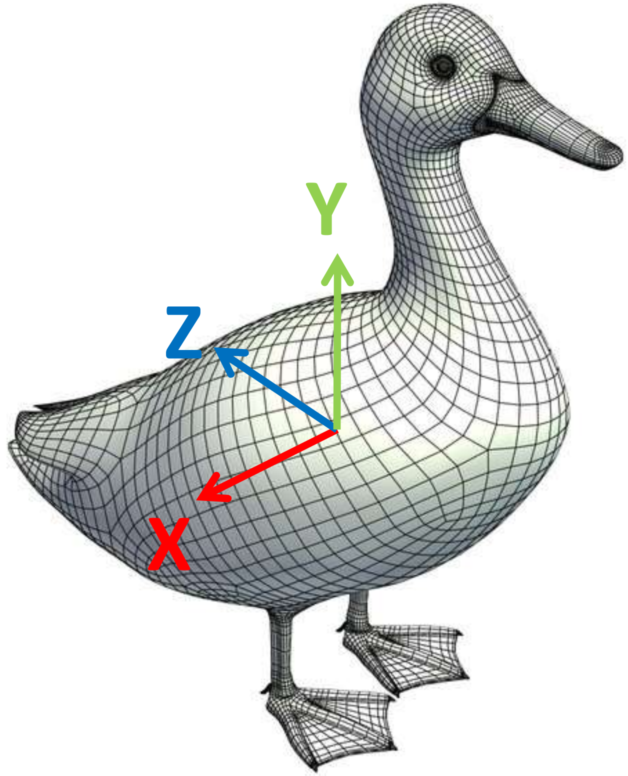
Koordinatni sistemi / prostori

- Grafičke biblioteke najčešće razlikuju tri koordinatna sistema za definisanje i vizuelizaciju objekata
  - Koordinatni sistem objekta (object space, model space)
  - Koordinatni sistem “realnog” sveta (world space)
  - Koordinatni sistem posmatrača (eye space, camera space)
- Namena: razdvojiti tri koncepta
  - Modeliranje – definisanje (formiranje) objekta
  - Raspoređivanje – sastavljanje scene, odnosno zadavanje pozicije i orijentacije objekata u prostoru
  - Vizuelizacija – posmatranje scene
- Temena su zadata homogenim koordinata
- Predstavljanje koordinatnih sistema: matrice 4x4
- Preslikavanje iz jednog sistema u drugi: množenje matrica
- Koristi se konvencija **pokretnog objekta**

Koordinatni sistem objekta

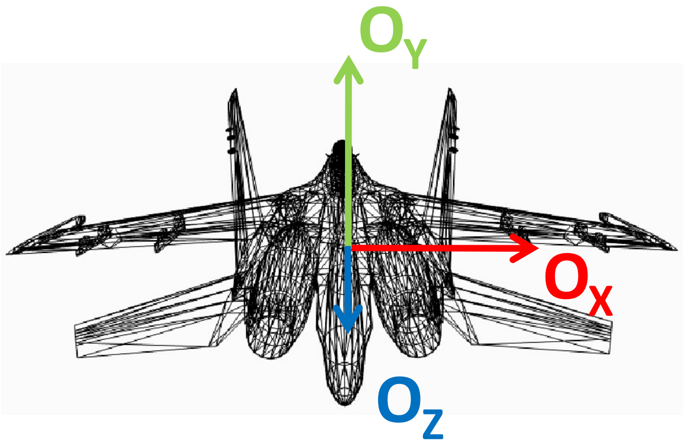
- **eng. *object space, model space***
- Modeliranje se vrši u koordinatnom sistemu objekta
  - Koordinatni početak referentna tačka za sva temena
  - Izbor pozicije k.p. **proizvoljan** (birati na osnovu geometrije ili simetrije objekta)
  - Izbor orijentacije objekta u odnosu na ose takođe **proizvoljan**

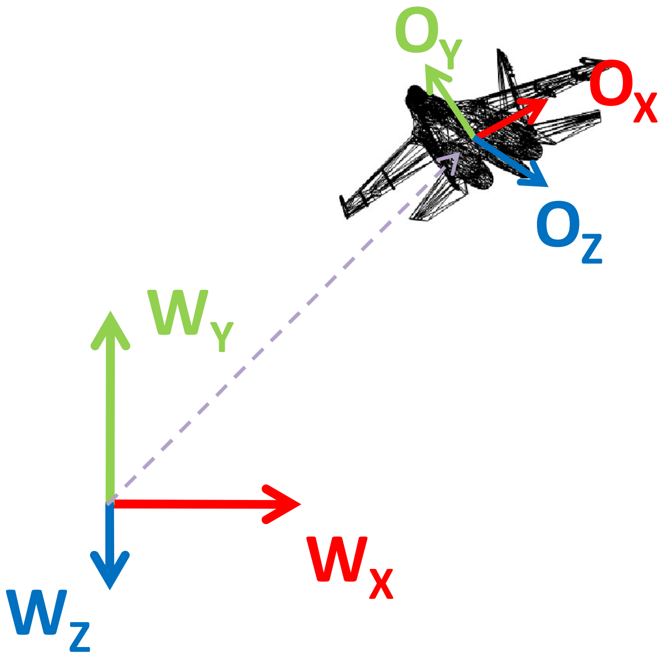
<ins>Primetiti</ins>: modeliranje je nezavisno od pozicije objekta u sceni



Koordinatni sistem sveta

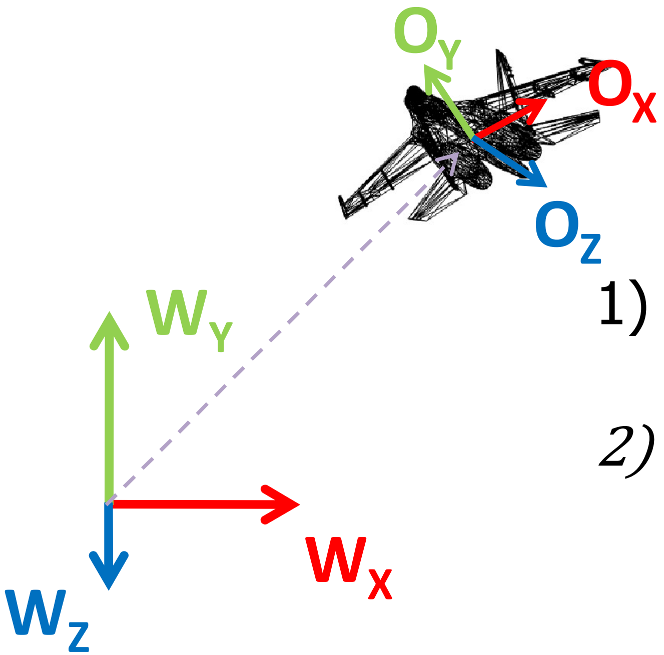
- **Koordinatni sistem sveta (*world space*)**
  - Koordinatni sistem referentan za datu scenu
  - Koordinatni početak – fiksna referentna tačka u prostoru
  - Pozicija i orijentacija kamere, svih objekata i izvora svetla u sceni definiše se u odnosu na ovaj koordinatni početak, odnosno sistem





Preslikavanje

- Transformacija k.s. objekta→k.s. sveta (*object to world transform*)



Kako izgleda X koordinata nekog temena $V = (V_X, V_Y, V_Z)$ u k.s. objekta na osi W_X?

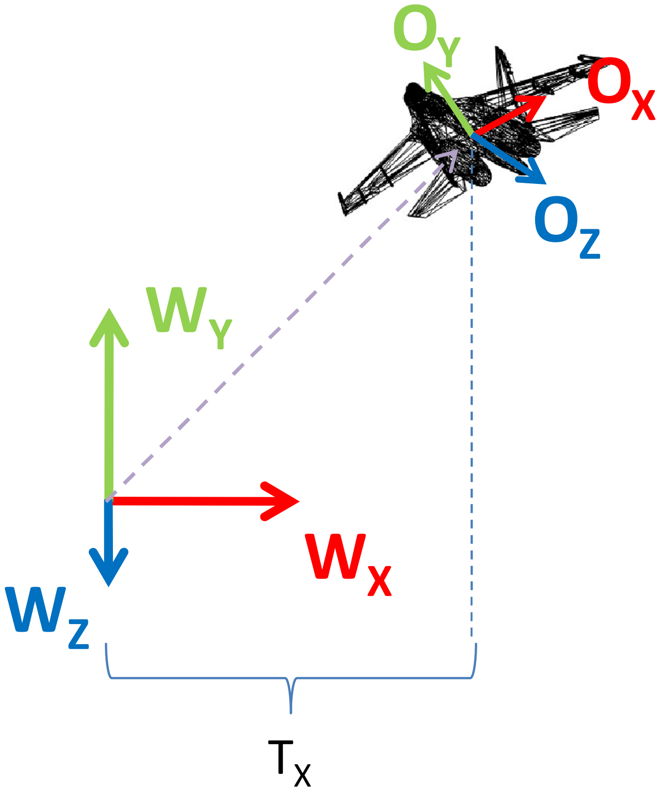
1) U opštem slučaju: projekcija O_X, O_Y ili O_Z na W_X nije 0.
2) V_X, V_Y i V_Z su definisani duž O_X, O_Y i O_Z, respektivno

Dakle: $V_X' = Proj_{W_X}(O_X) \cdot V_X + Proj_{W_X}(O_Y) \cdot V_Y + Proje_{W_X}(O_Z) \cdot V_Z + T_X$

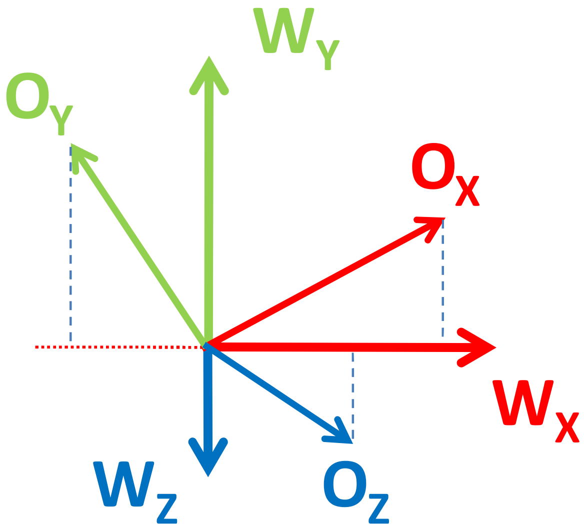
Slično za V_Y' i V_Z'.

Interpretacija sadržaja matrice transformacije

$$V_X' = Proj_{W_X}(O_X) \cdot V_X + Proj_{W_X}(O_Y) \cdot V_Y + Proje_{W_X}(O_Z) \cdot V_Z + T_X$$



$$\begin{bmatrix} Proj_{W_x}(O_X) & Proj_{W_x}(O_Y) & Proj_{W_x}(O_Z) & T_X \\ Proj_{W_y}(O_X) & Proj_{W_y}(O_Y) & Proj_{W_y}(O_Z) & T_Y \\ Proj_{W_z}(O_X) & Proj_{W_z}(O_Y) & Proj_{W_z}(O_Z) & T_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_X' \\ V_Y' \\ V_Z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

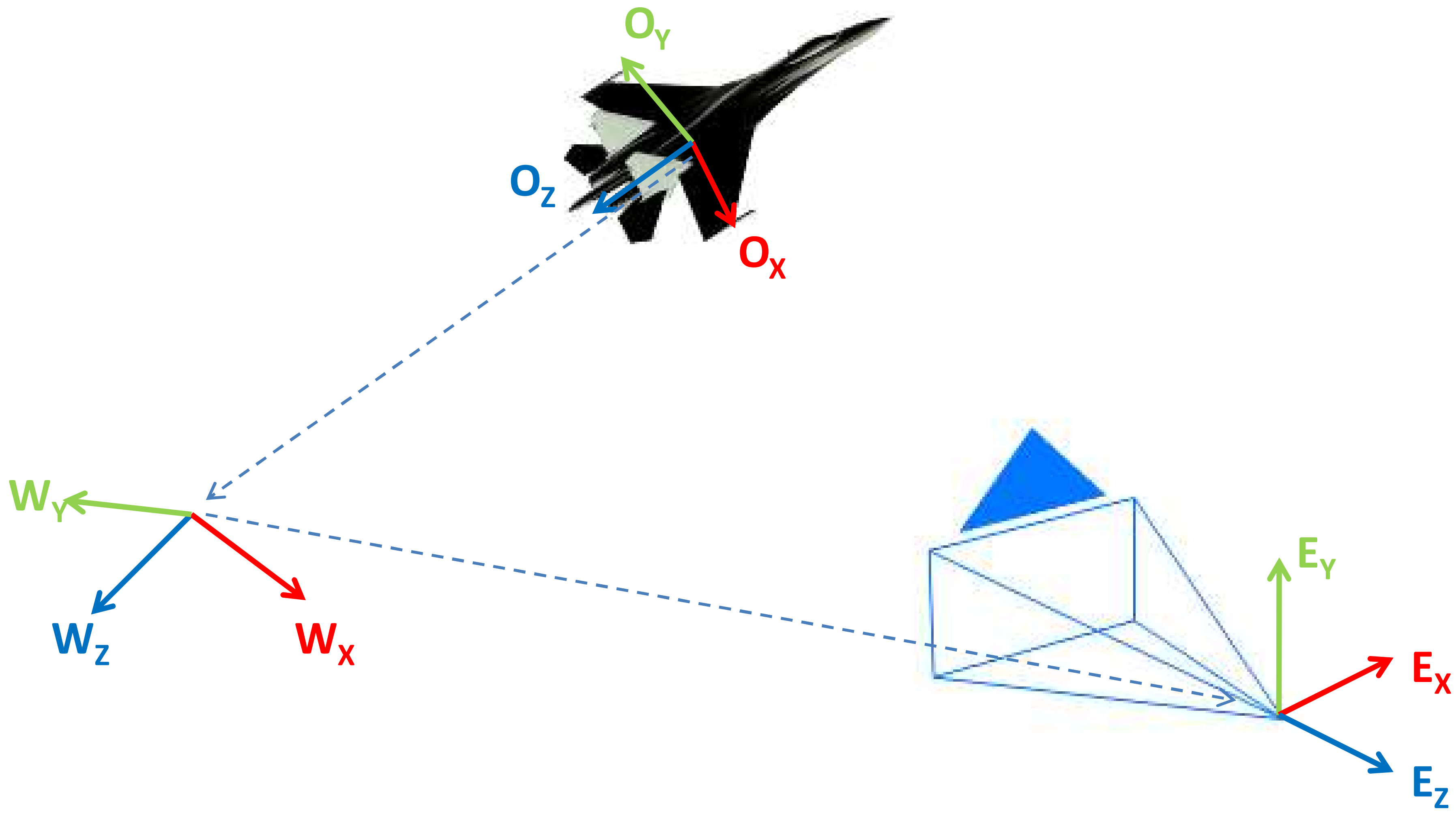


Kako izgleda transformacija iz k.s. sveta u k.s. objekta?

Koordinatni sistem posmatrača

- **eng.** ***camera space, eye space***
- Definiše poziciju i orijentaciju virtuelne kamere u odnosu na koordinatni sistem sveta
- Kako se vrši preslikavanje k.s. sveta → k.s. posmatrača ?
- Po analogiji sa prethodnim: odredi se matrica koja definiše poziciju i orijentaciju k.s. sveta u odnosu na k.s. posmatrača.

Koordinatni sistem posmatrača



Preslikavanje iz prostora objekta u prostor kamere

- U dva koraka – potrebne 2 matrice
  - 1) k.s. objekta $\rightarrow$ k.s. sveta
  - 2) k.s. sveta $\rightarrow$ k.s. posmatrača

$$V' = \underbrace{M_{W \rightarrow E} \cdot M_{O \rightarrow W}}_{M_{O \rightarrow E}} \cdot V$$

Projekcija

- Primenom ove matrice vidljiv prostor (eng. *frustrum*) se transformiše u homogeni prostor odsecanja (eng. *homogeneous clip space*)
- Homogeni prostor odsecanja je predstavljen **kockom** centriranom u (0, 0, 0), koord. temena -1 ili 1.
- Vrši se u dva koraka:
  1. Svako teme se množi sa matricom projekcije 4x4
  2. Deljenje dobijenih X, Y i Z koordinata sa W koordinatom dobija se 3D tačka sa normalizovanim koordinatama uređaja (eng. *normalized device coordinates*, NDC) u homogenom prostoru odsecanja

Projekcija

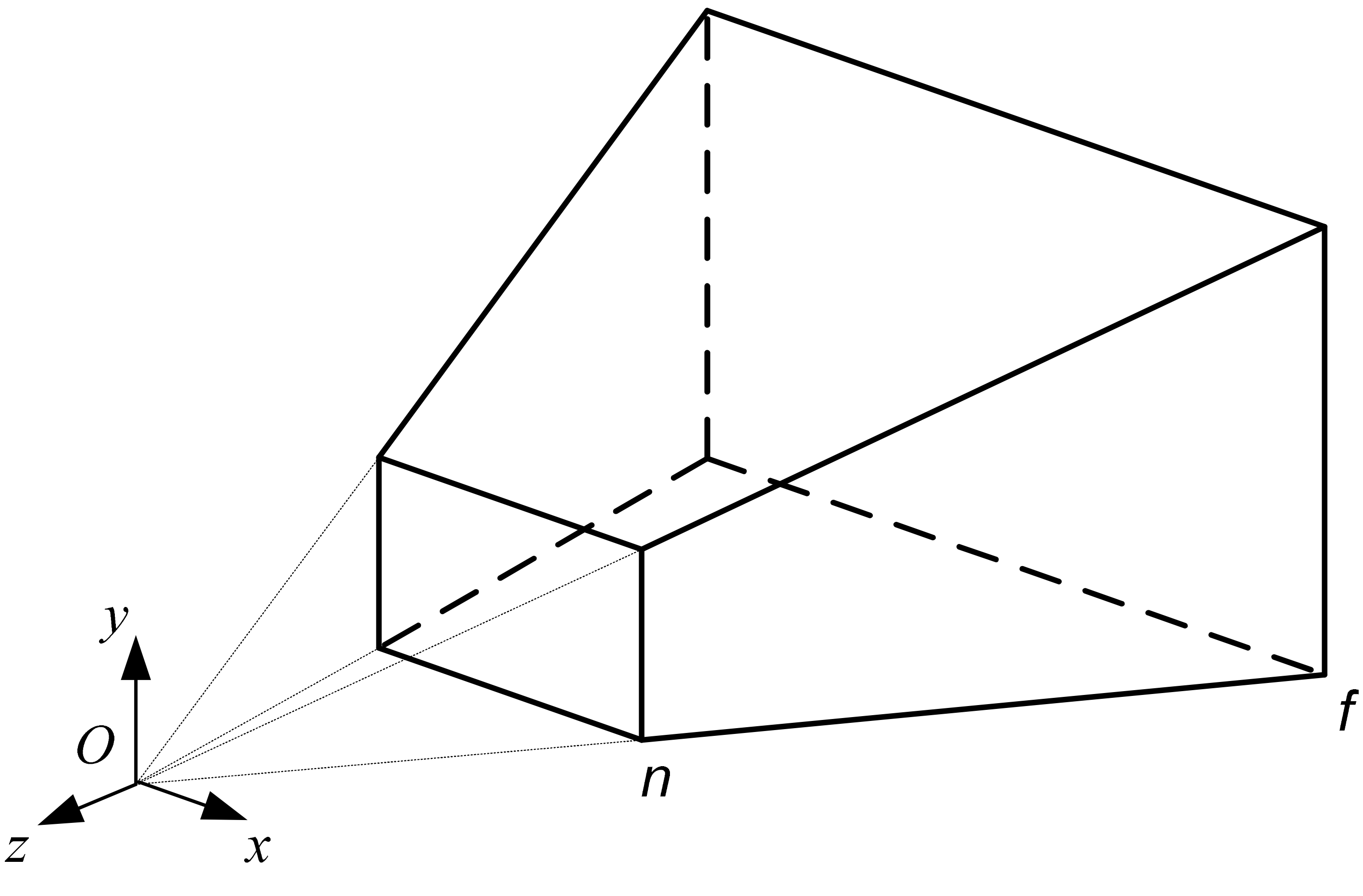
- Vidljiv prostor se najčešće definiše zadavanjem 6 parametara (pozicije prednje i zadnje odsecajuća ravan i stranica prostora)
- Pretpostavljamo da su sve tačke definisane u k.s. posmatrača
- Potrebno je odrediti matricu projekcije

$$\begin{bmatrix} x_{clip} \\ y_{clip} \\ z_{clip} \\ w_{clip} \end{bmatrix} = M_{projection} * \begin{bmatrix} x_{eye} \\ y_{eye} \\ z_{eye} \\ w_{eye} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{ndc} \\ y_{ndc} \\ z_{ndc} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{clip}/w_{clip} \\ y_{clip}/w_{clip} \\ z_{clip}/w_{clip} \\ w_{clip}/w_{clip} \end{bmatrix}$$

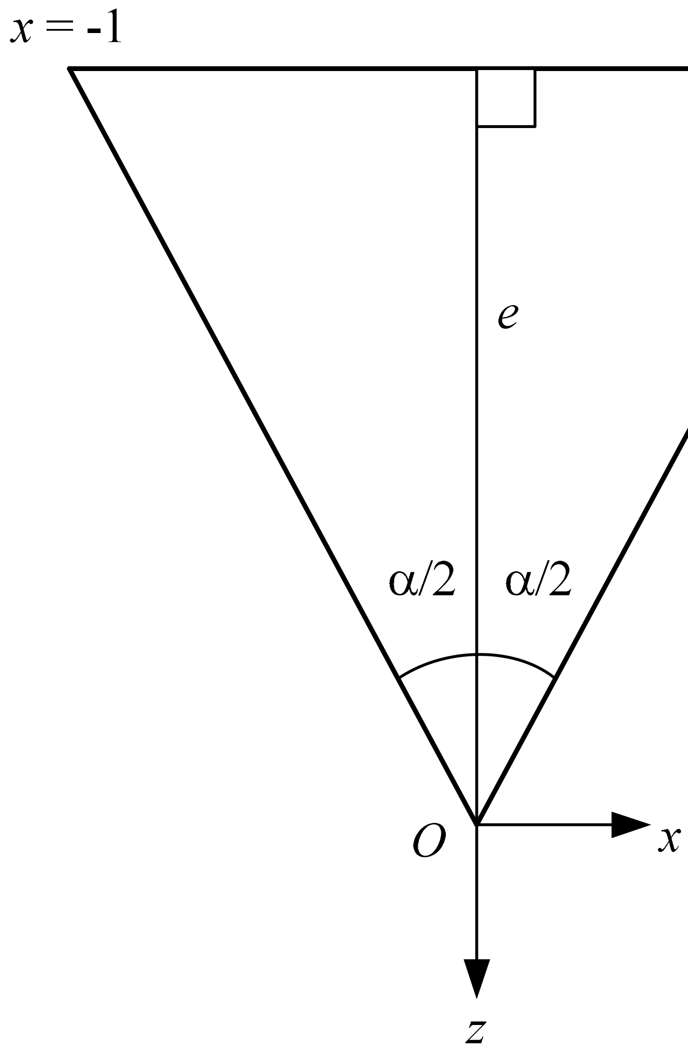
Vidljiv prostor – projekcija sa perspektivom

- eng. view frustum



Horizontalno vidno polje

- *eng. horizontal field of view:* α

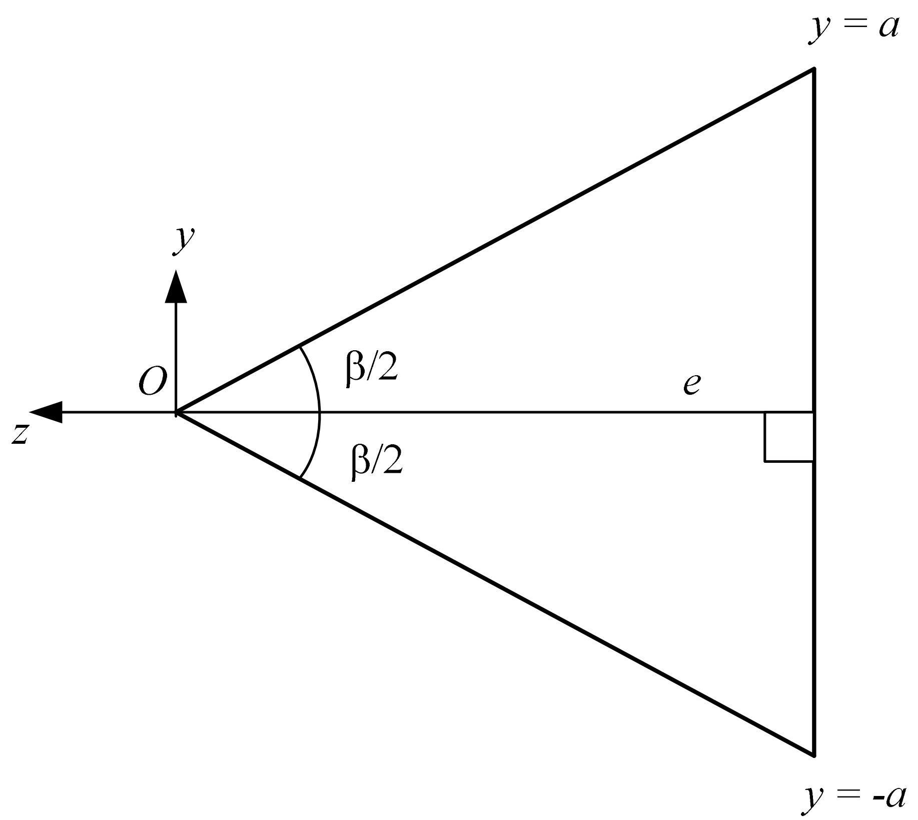


Projekciona ravan

$$e = \frac{1}{\tan(\alpha / 2)}$$

Vertikalno vidno polje

- *eng. vertical field of view:* $\beta \neq \alpha$
- odnos visine i širine ekrana (*eng. aspect ratio*): a



Projekciona ravan

`glFrustum:`

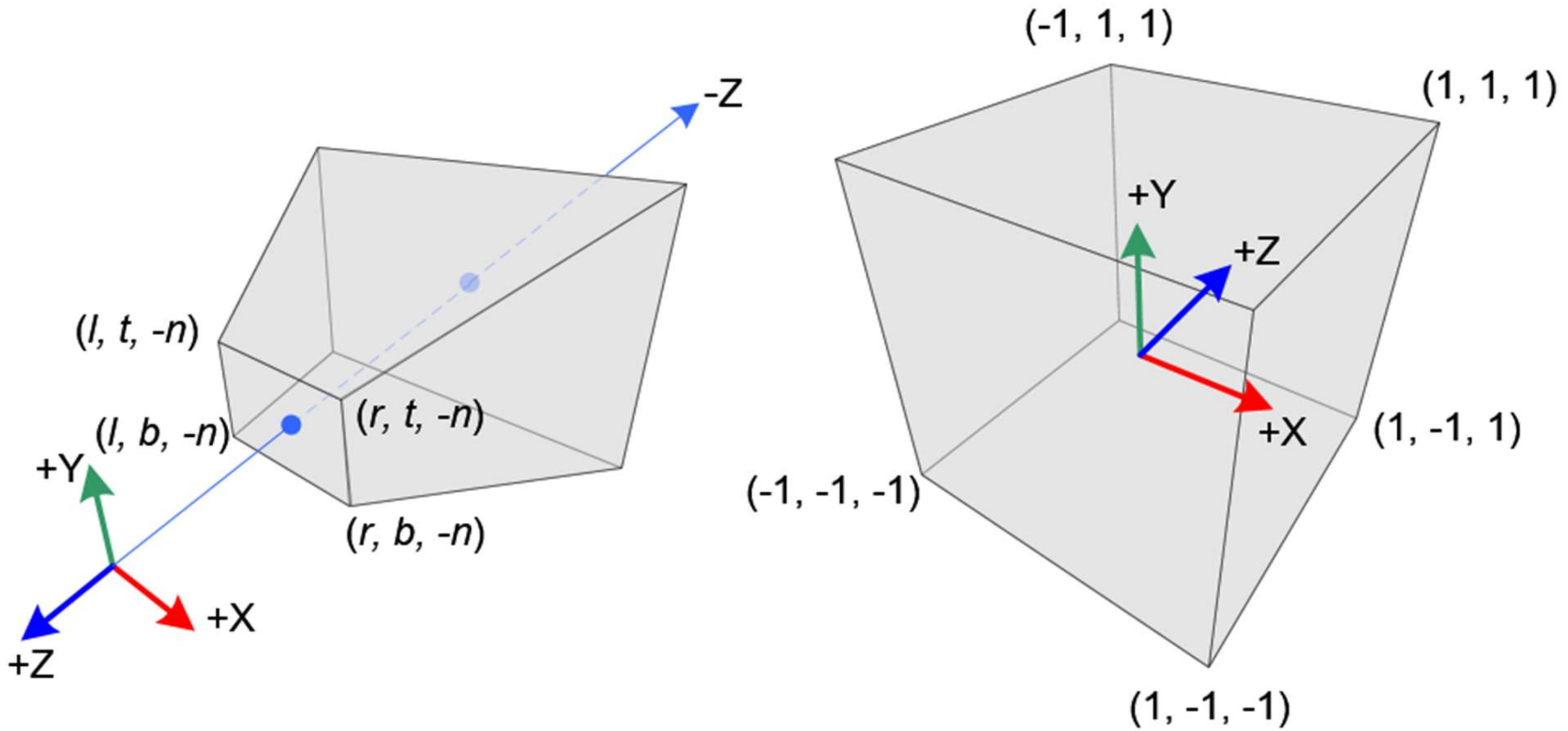
Levo: $-n/e$

Desno: n/e

Gore: an/e

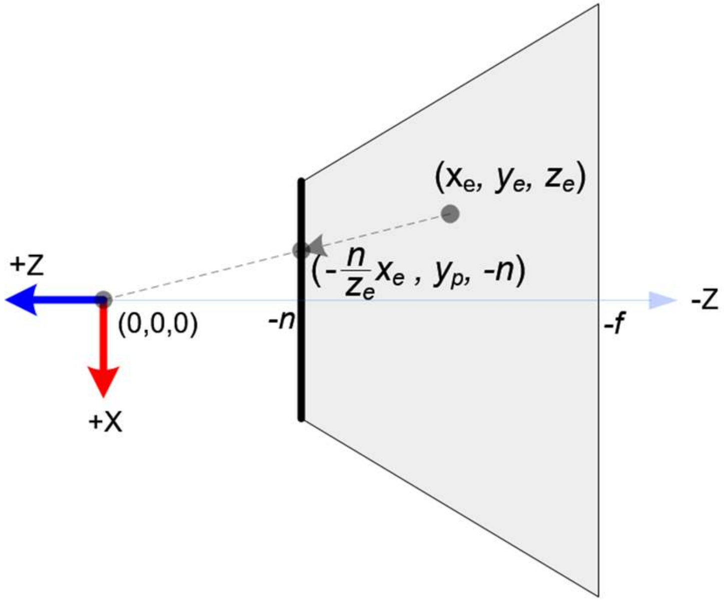
Dole: $-an/e$

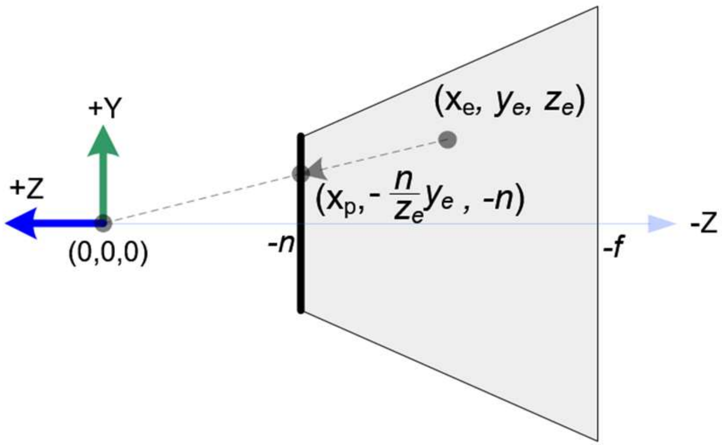
Projekcija sa perspektivom



- Koordinate tačaka u k.s. kamere (levo) su date u desnom pravouglom k.s., dok su homogenom prostoru odsecanja date u levom pravouglom k.s.
- Kamera „gleda" u pravcu negativne Z ose

Projekcija sa perspektivom





- Prvo je potrebno naći projekcije X i Y koordinate tačke na prednju odsecajući ravan (sličnost trouglova)

$$\frac{x_p}{x_{eye}} = \frac{-n}{z_{eye}} \Rightarrow x_p = \frac{n * x_{eye}}{-z_{eye}}$$

$$\frac{y_p}{y_{eye}} = \frac{-n}{z_{eye}} \Rightarrow y_p = \frac{n * y_{eye}}{-z_{eye}}$$

- Projekcije X i Y koordinata su inverzno propocionalne Z koordinati tačke u k.s. posmatrača $\Rightarrow w_{clip} = -z_{eye}$
- Poslednja vrsta matrice projekcije je $[0 \quad 0 \quad -1 \quad 0]$

Projekcija sa perspektivom

- Sledeći korak je preslikavanje opsega $[l, r] \Rightarrow [-1, 1]$ i opsega $[b, t] \Rightarrow [-1, 1]$ da bi se odredile X i Y koordinate u NDC

$$(r - l) : 2 = (x_p + 1) : x_{ndc} \Rightarrow x_{ndc} = 2\frac{x_p - l}{r - l} - 1$$

$$(b - t) : 2 = (y_p + 1) : y_{ndc} \Rightarrow y_{ndc} = 2\frac{y_p - b}{t - b} - 1$$

- Zamenom projekcija u prethodne dve jednačine dobije konačan izgled koordinata u NDC:

$$x_{ndc} = \frac{\frac{2n}{r - l} * x_{eye} + \frac{r + l}{r - l} * z_{eye}}{-z_{eye}}$$

$$y_{ndc} = \frac{\frac{2n}{t - b} * y_{eye} + \frac{t + b}{t - b} * z_{eye}}{-z_{eye}}$$

Projekcija sa perspektivom

- Preslikavanje Z koordinate se ne može odrediti analitičkim putem, a postoji dodatni zahtev da preslikavanje mora biti linearno po **recipročnoj** vrednosti Z (kasnije će biti objašnjeno zašto).
- Na konačnu vrednost Z koordinate ne utiču X i Y koordinate tačke u k.s. posmatrača pa matricu projekcije možemo predstaviti na sledeći način

$$\begin{bmatrix} x_{clip} \\ y_{clip} \\ z_{clip} \\ w_{clip} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{eye} \\ y_{eye} \\ z_{eye} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Projekcija sa perspektivom

- Na osnovu prethodnog množenja možemo dobiti vrednost z koordinate u NDC

$$z_{ndc} = \frac{z_{clip}}{w_{clip}} = \frac{A * z_{eye} + B}{-z_{eye}}$$

- Znamo da važe sledeće relacije

$$z_{eye} = -n \Rightarrow z_{ndc} = -1$$
$$z_{eye} = -f \Rightarrow z_{ndc} = 1$$

- Zamenom u prethodnih vrednosti dobijamo konačni izraz za z koordinatu

$$z_{ndc} = \frac{-\frac{f+n}{f-n} * z_{eye} - \frac{2fn}{f-n}}{-z_{eye}}$$

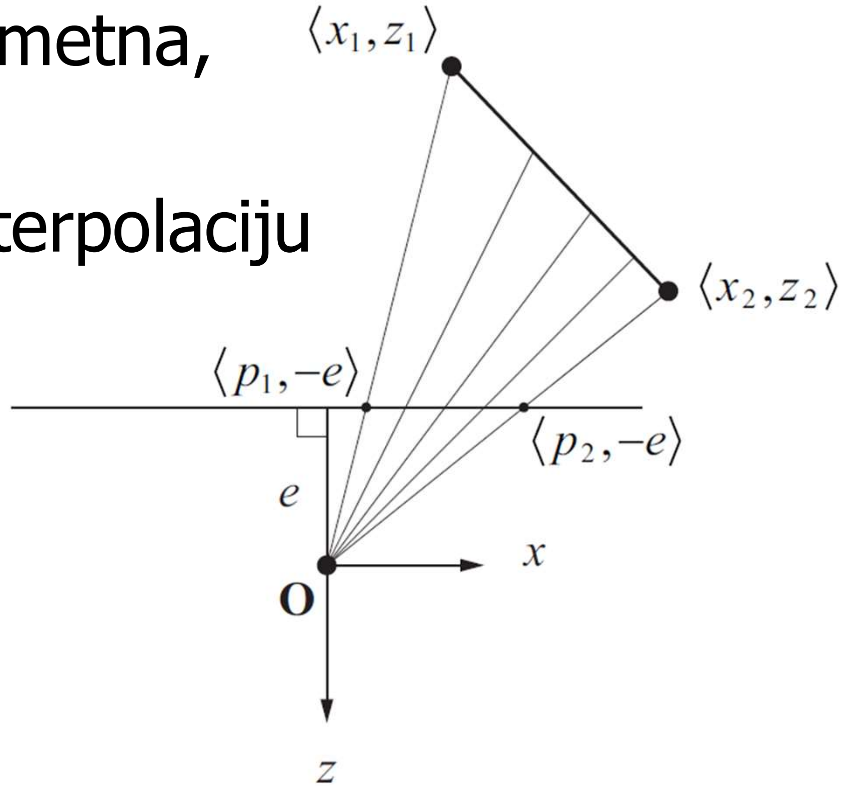
Projekcija sa perspektivom

- Konačni izgled matrice projekcije sa perspektivom

$$
\begin{bmatrix}
\frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\
0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n} \\
0 & 0 & -1 & 0
\end{bmatrix}
$$

Ispravna interpolacija u projekciji sa perspektivom

- Temena nose informacije koje se interpoliraju (boja, osvetljaj, koordinate u prostoru teksture, itd)
- Linearna interpolacija je neadekvatna (iako greška uglavnom nije primetna, osim za teksture)
- Potrebno je izvršiti ispravnu interpolaciju



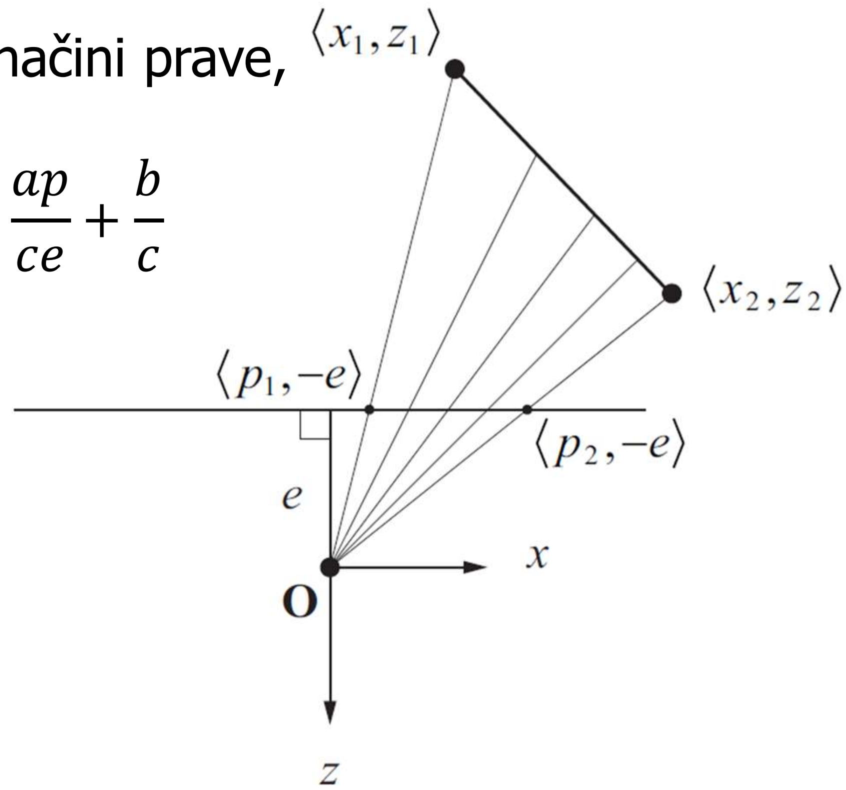
Ispravna interpolacija u projekciji sa perspektivom

- Jednačina prave koja prolazi kroz tačke (x_1, z_1) i (x_2, z_2) je $ax + bz = c, c \neq 0$.
- Zrak iz $(0,0)$ koji preseca pravu u tački (x, z), preseca projekcionu ravan u tački $(p, -e)$
- Iz sličnosti trouglova možemo odrediti vrednost koordinate x

$$\frac{p}{x} = \frac{-e}{z} \Rightarrow x = -\frac{(pe)}{z}$$

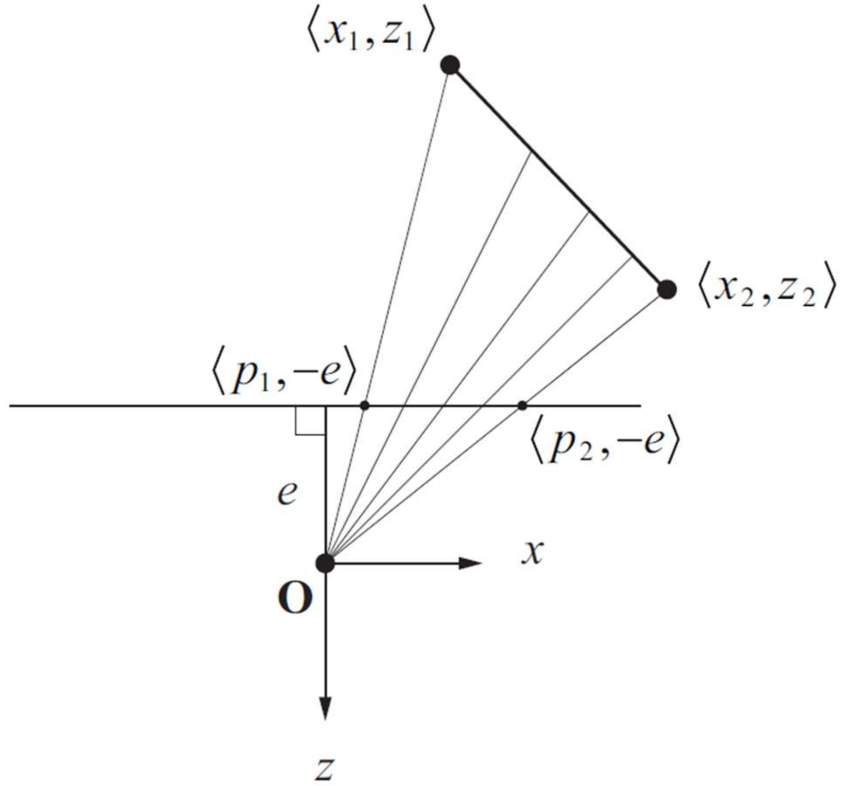
- Ukoliko zamenimo vrednost x u prethodnoj jednačini prave, dobijamo sledeću

$$\left(-\frac{ap}{e} + b\right)z = c \Rightarrow \frac{1}{z} = -\frac{ap}{ce} + \frac{b}{c}$$



Ispravna interpolacija u projekciji sa perspektivom

- Za proizvoljnu tačku $p_3 = (1-t)p_1 + t\,p_2, t \in [0,1]$, dobija se da je odgovarajuća z koordinata $\frac{1}{z_3} = \frac{1}{z_1}(1-t) + \frac{1}{z_2}t$
- Zaključak: recipročna vrednost z koordinate se ispravno interpolira linearnom interpolacijom.



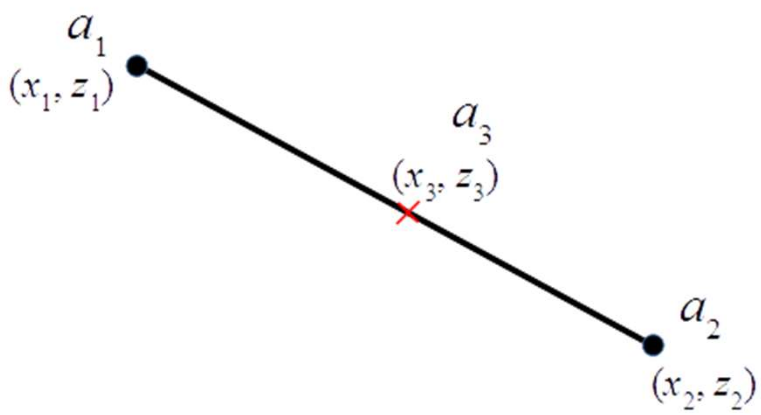
Ispravna interpolacija atributa temena

- I atributi temena se interpolirаju na sličan način

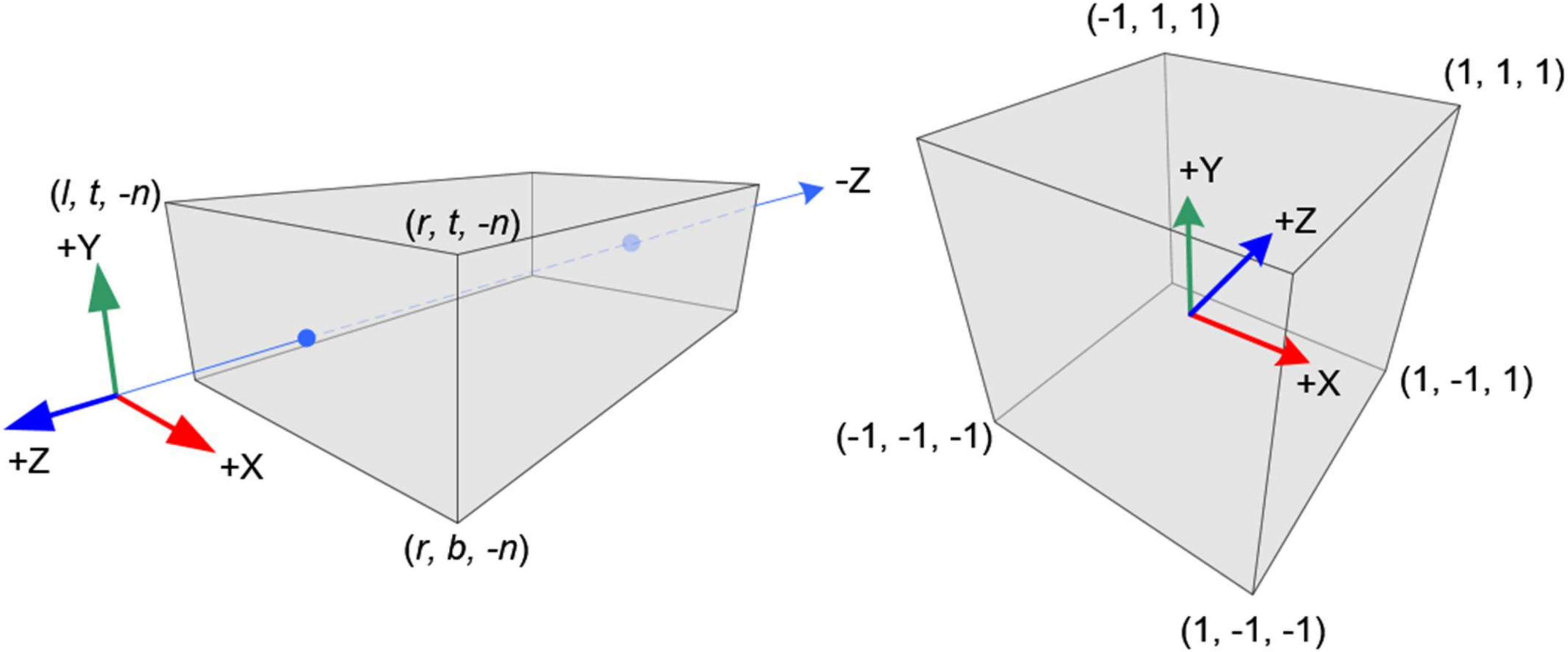
$$z_3 = \frac{1}{\frac{1}{z_1}(1-t) + \frac{1}{z_2}t}$$

$$\frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$\frac{a_3}{z_3} = \frac{a_1}{z_1}(1-t) + \frac{a_2}{z_2}t$$



Ortografska projekcija



- Važe iste pretpostavke kao kod projekcije sa perspektivom, ali je vidni prostor drugačiji

Ortografska projekcija

- U slučaju ortografske projekcije potrebno je samo pretvoriti vidni prostor (u ovom slučaju kvadar) u traženu kocku
- Preslikavanjem se dobija sledeća matrica

$$\begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Preslikavanje iz 3D u 2D koordinate Rekapitulacija