

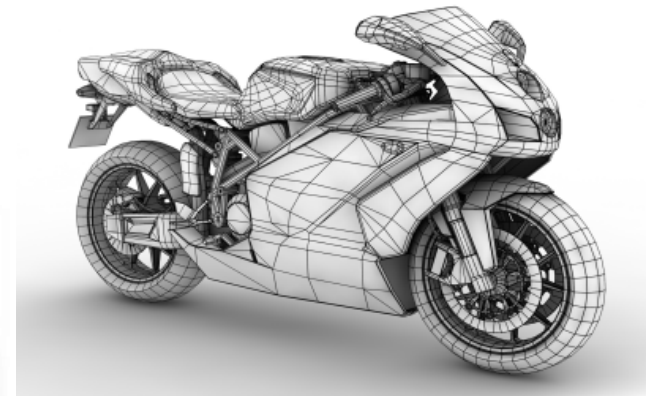
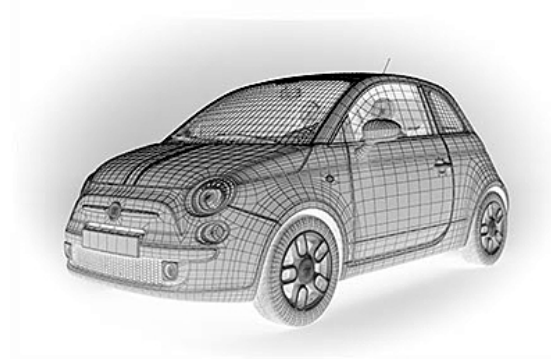
Računarska grafika 2

13M111RG2

2 Koordinatni sistemi i transformacije

Predstavljanje objekata

- Načini predstavljanja objekata
 - Egzaktno (matematička formula)
 - Aproksimativno
 - skup/mreža poligona
 - vokseli
- Moderan hardver optimizovan za crtanje/popunjavanje poligona
- Za najjednostavniji vid prikazivanja dovoljna geometrijska definicija
 - skupa temena (3D pozicije)
 - način povezivanja temena u poligone

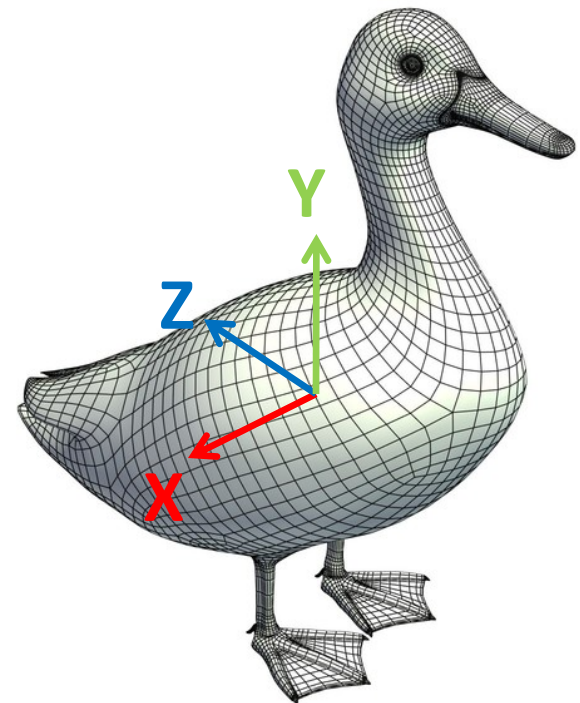


Koordinatni sistemi / prostori

- Grafičke biblioteke najčešće razlikuju tri koordinatna sistema za definisanje i vizuelizaciju objekata
 - Koordinatni sistem objekta (object space, model space)
 - Koordinatni sistem “realnog” sveta (world space)
 - Koordinatni sistem posmatrača (eye space, camera space)
- Namena: razdvojiti tri koncepta
 - Modeliranje – definisanje (formiranje) objekta
 - Raspoređivanje – sastavljanje scene, odnosno zadavanje pozicije i orijentacije objekata u prostoru
 - Vizuelizacija – posmatranje scene
- Predstavljanje koordinatnih sistema: matrice 4×4
- Preslikavanje iz jednog sistema u drugi: množenje matrica
- Koristi se konvencija **pokretnog objekta**

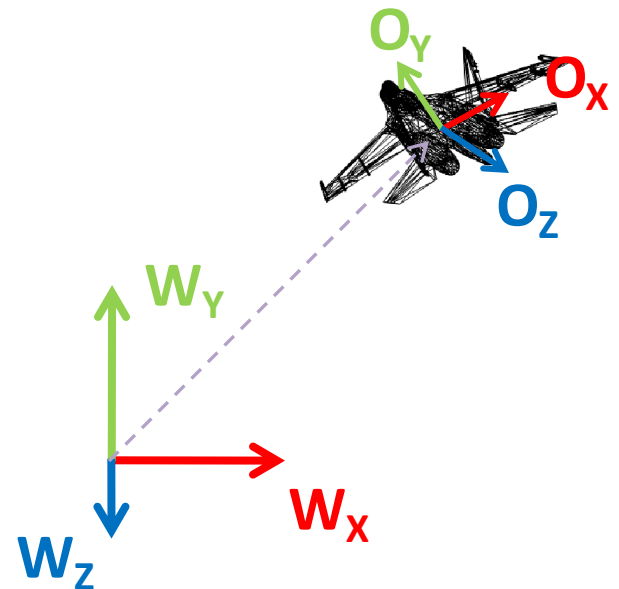
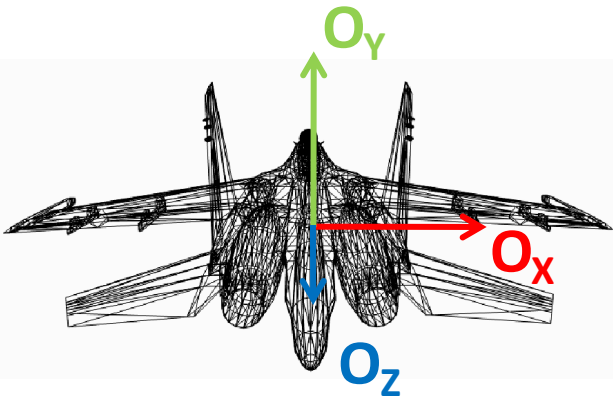
Koordinatni sistem objekta

- **eng. *object space, model space***
- Modeliranje se vrši u koordinatnom sistemu objekta
 - Koordinatni početak referentna tačka za sva temena
 - Izbor pozicije k.p. **proizvoljan** (birati na osnovu geometrije ili simetrije objekta)
 - Izbor orijentacije objekta u odnosu na ose takođe **proizvoljan**
- Primetiti: modeliranje je nezavisno od pozicije objekta u sceni



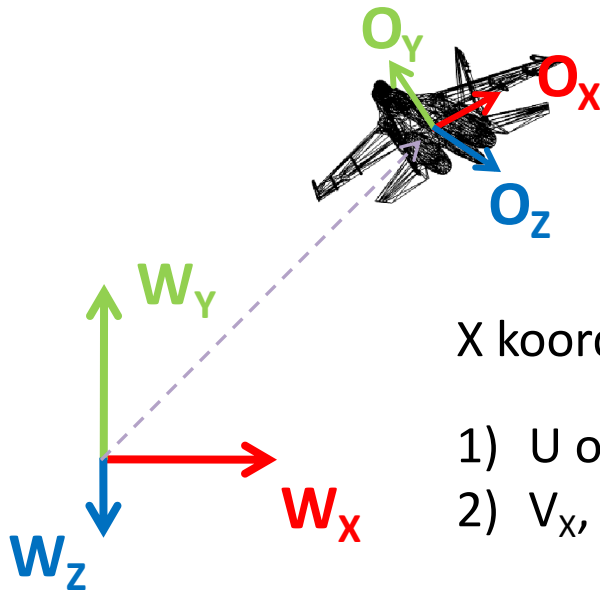
Koordinatni sistem sveta

- **Koordinatni sistem sveta (*world space*)**
 - Koordinatni sistem referentan za datu scenu
 - Koordinatni početak – fiksna referentna tačka u prostoru
 - Pozicija i orijentacija kamere, svih objekata i izvora svetla u sceni definiše se u odnosu na ovaj koordinatni početak, odnosno sistem



Preslikavanje

- Transformacija k.s. objekta $\rightarrow$ k.s. sveta (obj. to world transform)



X koordinata nekog temena u k.s.o. $V=(V_x, V_y, V_z)$ na osi W_x ?

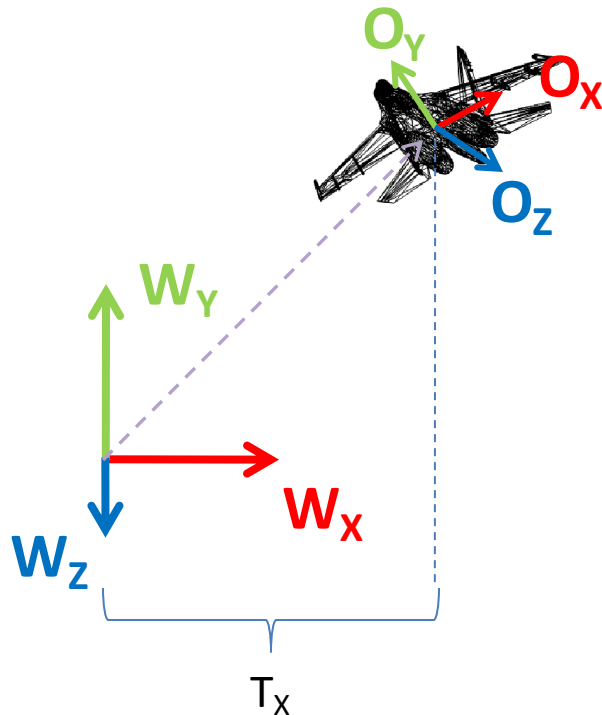
- 1) U opštem slučaju: projekcija O_x , O_y ili O_z na W_x nije 0.
- 2) V_x , V_y i V_z su definisani duž O_x , O_y i O_z , respektivno

Dakle: $V'_x = \text{Proj}_{W_x}(O_x) \cdot V_x + \text{Proj}_{W_x}(O_y) \cdot V_y + \text{Proj}_{W_x}(O_z) \cdot V_z + T_x$

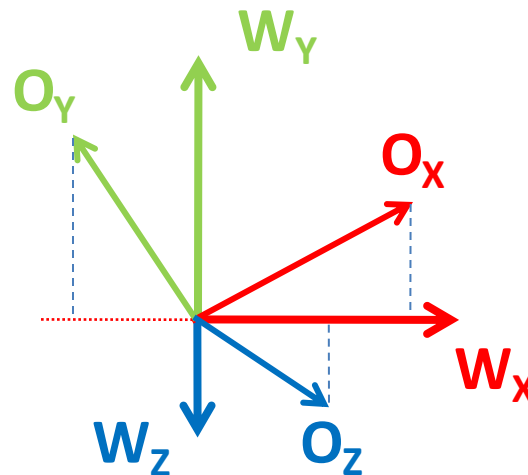
Slično za V'_y i V'_z .

Interpretacija sadržaja matrice transformacije

$$V_X' = \text{Proj}_{W_X}(O_X) \cdot V_X + \text{Proj}_{W_X}(O_Y) \cdot V_Y + \text{Proj}_{W_X}(O_Z) \cdot V_Z + T_X$$



$$\begin{bmatrix} X(O_X) & X(O_Y) & X(O_Z) & T_X \\ Y(O_X) & Y(O_Y) & Y(O_Z) & T_Y \\ Z(O_X) & Z(O_Y) & Z(O_Z) & T_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_X' \\ V_Y' \\ V_Z' \\ 1 \end{bmatrix}$$



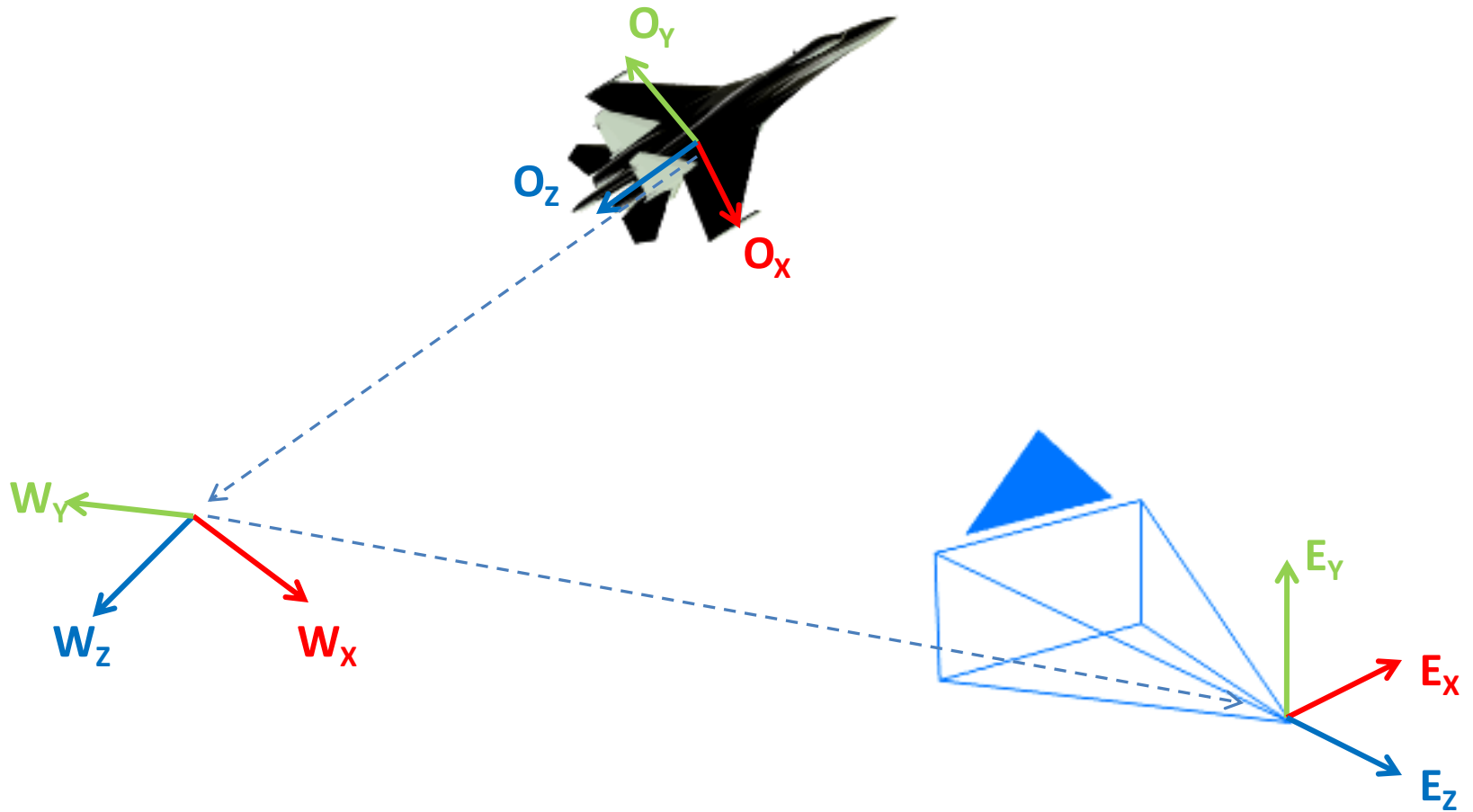
Kako izgleda
transformacija
iz k.s. sveta u k.s. objekta



Koordinatni sistem posmatrača

- **eng. *camera space, eye space***
- Definiše poziciju i orijentaciju virtuelne kamere u odnosu na koordinatni sistem sveta
- Kako se vrši preslikavanje k.s. sveta → k.s. posmatrača ?
- Po analogiji sa prethodnim: odredi se matrica koja definiše poziciju i orijentaciju k.s. sveta u odnosu na k.s. posmatrača.

Koordinatni sistem posmatrača



Preslikavanje iz prostora objekta u prostor kamere

- U dva koraka – potrebne 2 matrice
 - 1) k.s. objekta $\rightarrow$ k.s. sveta
 - 2) k.s. sveta $\rightarrow$ k.s. posmatrača

$$V' = \underbrace{M_{W \rightarrow E} \cdot M_{O \rightarrow W}}_{M_{O \rightarrow E}} \cdot V$$

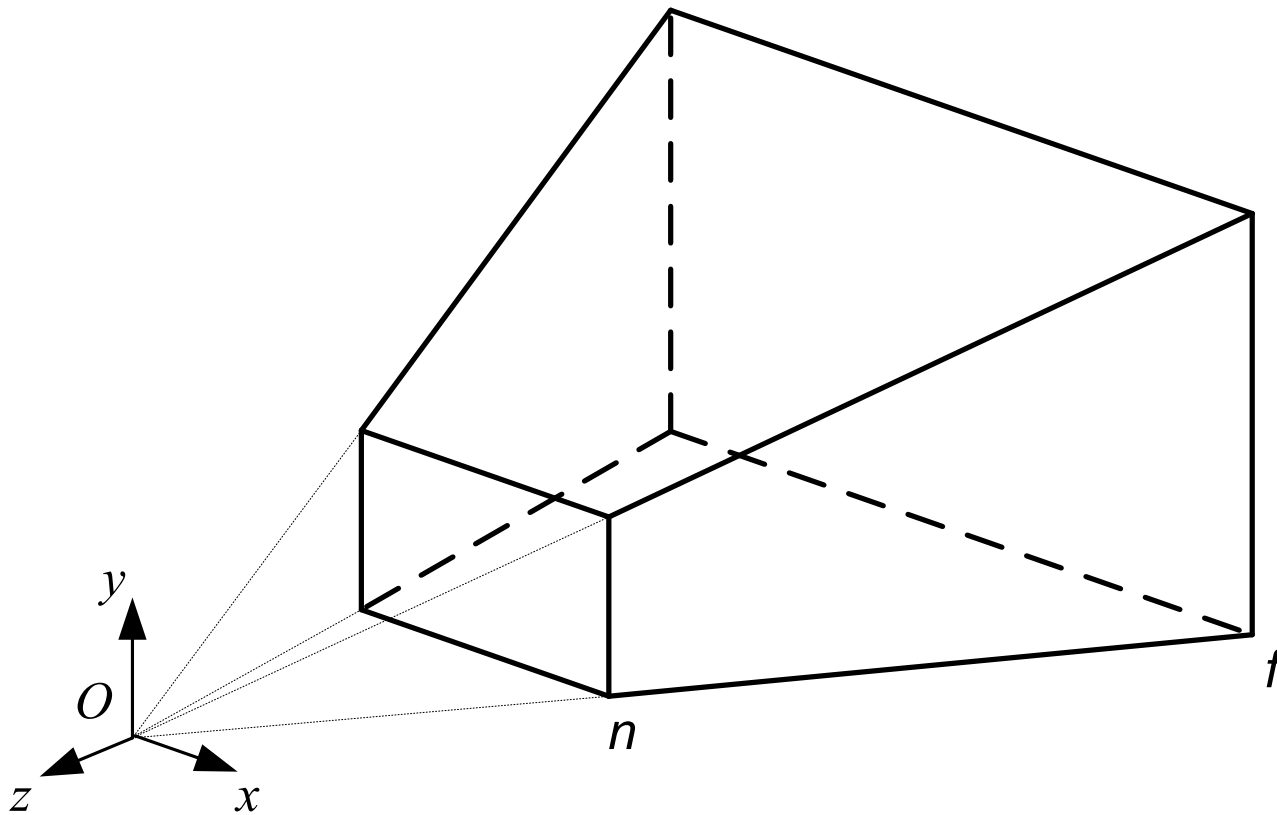
- Kako zadržati 3 koordinatna sistema,
ali jednu matricu?

Preslikavanje iz prostora objekta u prostor kamere

- Grafičke biblioteke obično imaju samo jednu matricu kojom se vrši transformacija $O \rightarrow E$
 - model-view matrix (OpenGL do verzije 3.0: `GL_MODELVIEW`)
 - objedinjuje transformaciju modela i pogleda
- Najpre se postavi transformacija pogleda
 - zapravo pozicija i orijentacija k.s. sveta u odnosu na k.s. posmatrača
 - ona je zajednička za sve objekte
- Zatim se za svaki objekat zada njegova transformacija
 - Push/Pop matrix

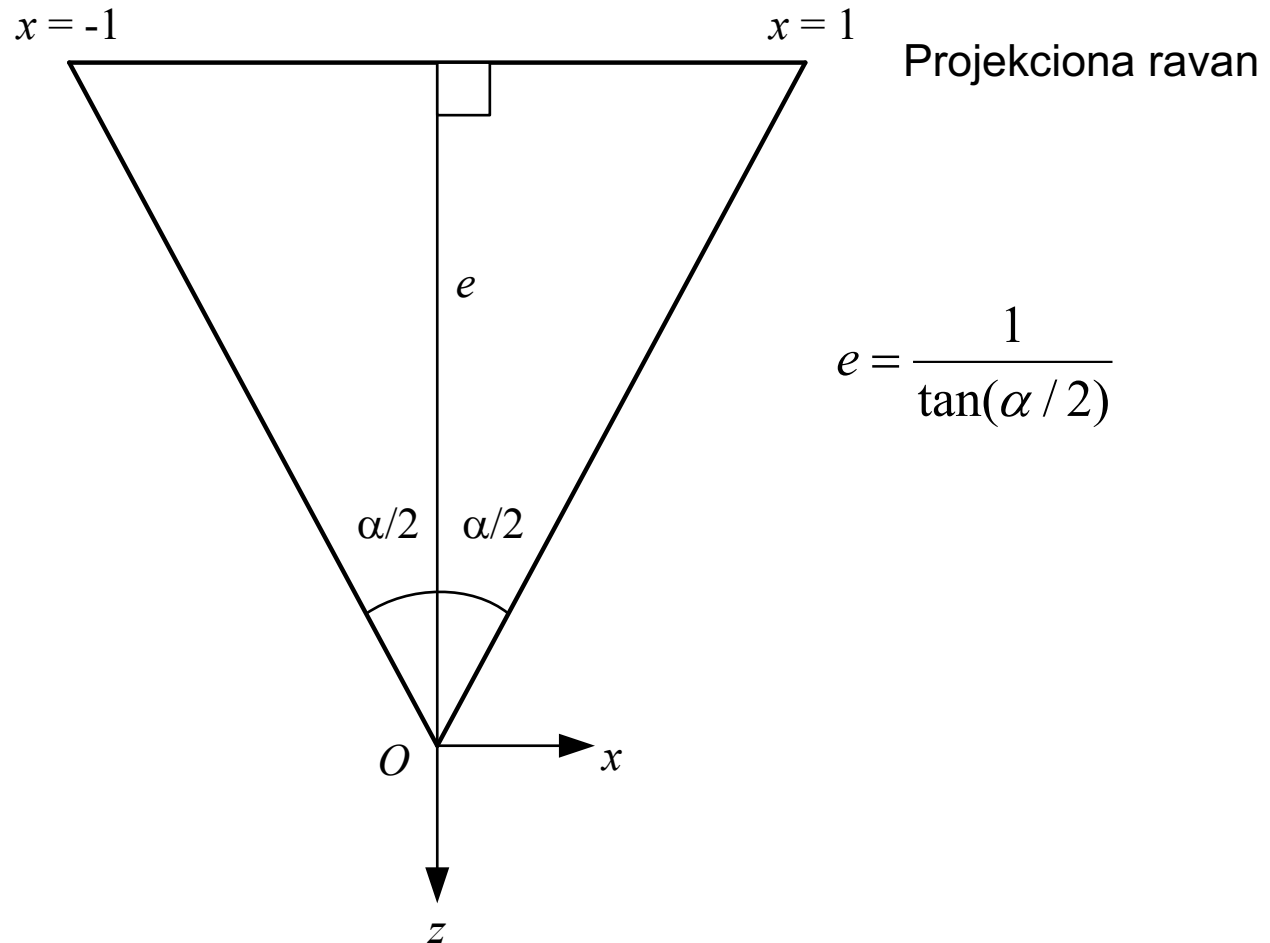
Vidljiv prostor

- eng. view frustum



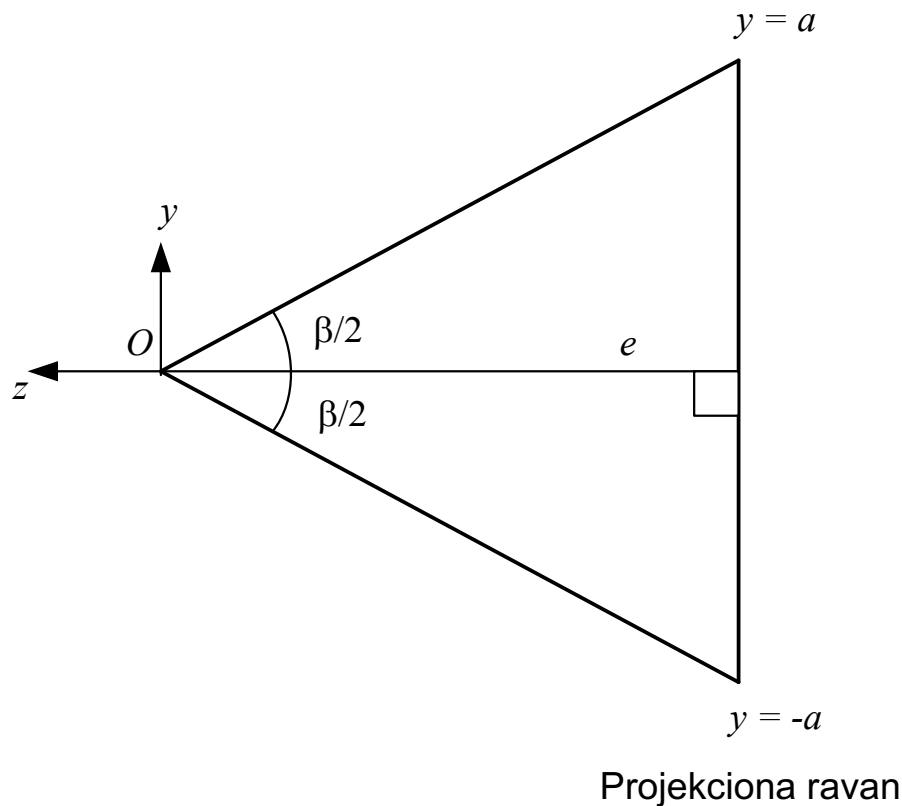
Horizontalno vidno polje

- eng. horizontal field of view: α



Vertikalno vidno polje

- eng. vertical field of view: $\beta \neq \alpha$
- odnos visine i širine ekrana (eng. aspect ratio): a



glFrustum:

Levo: $-n/e$

Desno: n/e

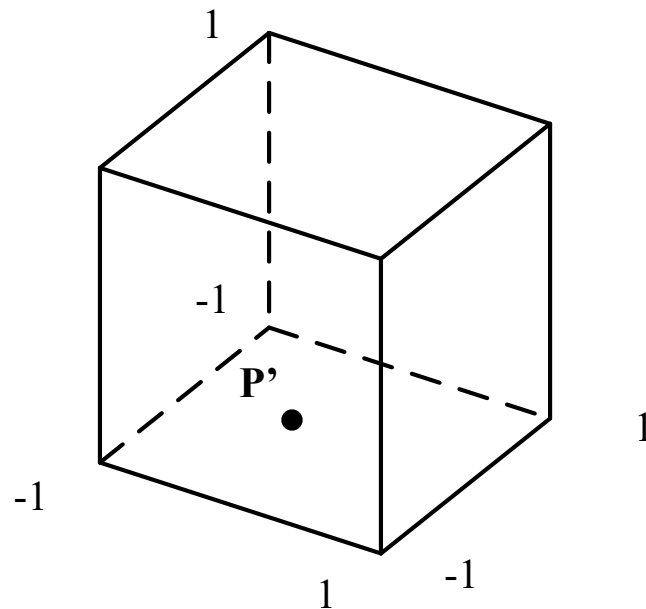
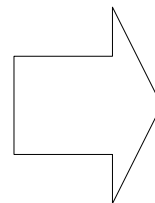
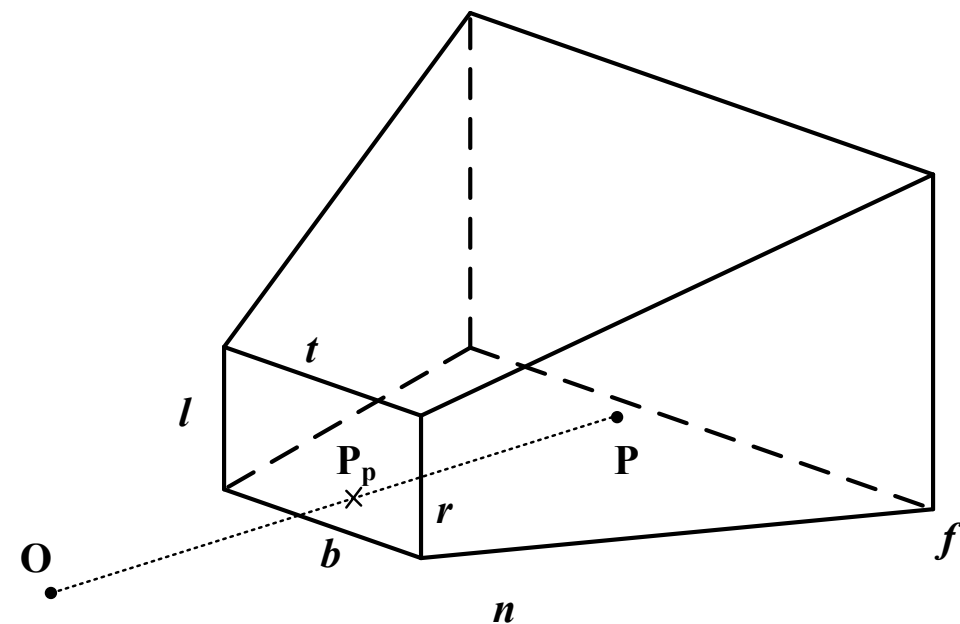
Gore: an/e

Dole: $-an/e$

Projekcija (1)

- Preslikava vidljiv prostor (zapreminu, zarubljenu piramidu) na **kocku**, centriranu u $(0,0,0)$, koord. temena -1 ili 1.
- Kocka predstavlja homogen prostor odsecanja (eng. *homogeneous clip space*)
- Mapiranje se vrši matricom projekcije 4×4
 - zamena **negativne** Z koordinate tačke (u k.s. pogleda) u W koordinatu transformisane tačke
- Deljenje sa W daje 3D tačku u normalizovanim koordinatama uređaja (eng. *normalized device coordinates*, NDC)

Projekcija (2)



$$P = \langle P_x, P_y, P_z, 1 \rangle$$

$$x_p = -\frac{n}{P_z} P_x$$

$$y_p = -\frac{n}{P_z} P_y$$

$$x' = 2 \frac{x_p - l}{r - l} - 1$$

$$y' = 2 \frac{y_p - b}{t - b} - 1$$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{2n}{r-l} \left(-\frac{P_x}{P_z} \right) - \frac{r+l}{r-l} \\ y' &= \frac{2n}{t-b} \left(-\frac{P_y}{P_z} \right) - \frac{t+b}{t-b} \end{aligned}$$

$$\boxed{z' ?}$$

Projekcija (3)

- P je u vidljivom prostoru $\rightarrow -f \leq P_z \leq -n$
- Potrebno preslikavanje: $-n \rightarrow -1, \quad -f \rightarrow 1$
 - primetiti: dolazi do ogledanja Z ose,
homogen prostor odsecanja je levi koordinatni sistem
- Dodatni zahtev: preslikavanje mora biti linearno po **recipročnoj** vrednosti z (kasnije će biti objašnjeno zašto).
- Funkcija kojom se vrši preslikavanje: $z' = \frac{A}{z} + B$
 - A i B se određuju smenom $z=-n, z'=-1$ i $z=-f, z'=1$

$$z' = -\frac{2nf}{f-n} \left(-\frac{1}{P_z} \right) + \frac{f+n}{f-n}$$

Projekcija (4)

- U izrazima za x' , y' i z' pojavljuje se deljenje sa $-P_z$

$$\mathbf{P}' = \langle x', y', z' \rangle \Leftrightarrow \mathbf{P}' = \langle -x' P_z, -y' P_z, -z' P_z, -P_z \rangle$$

$$-x' P_z = \frac{2n}{r-l} P_x + \frac{r+l}{r-l} P_z$$

$$-y' P_z = \frac{2n}{t-b} P_y + \frac{t+b}{t-b} P_z$$

$$-z' P_z = -\frac{f+n}{f-n} P_z - \frac{2nf}{f-n}$$

Linearne funkcije koordinata tačke P

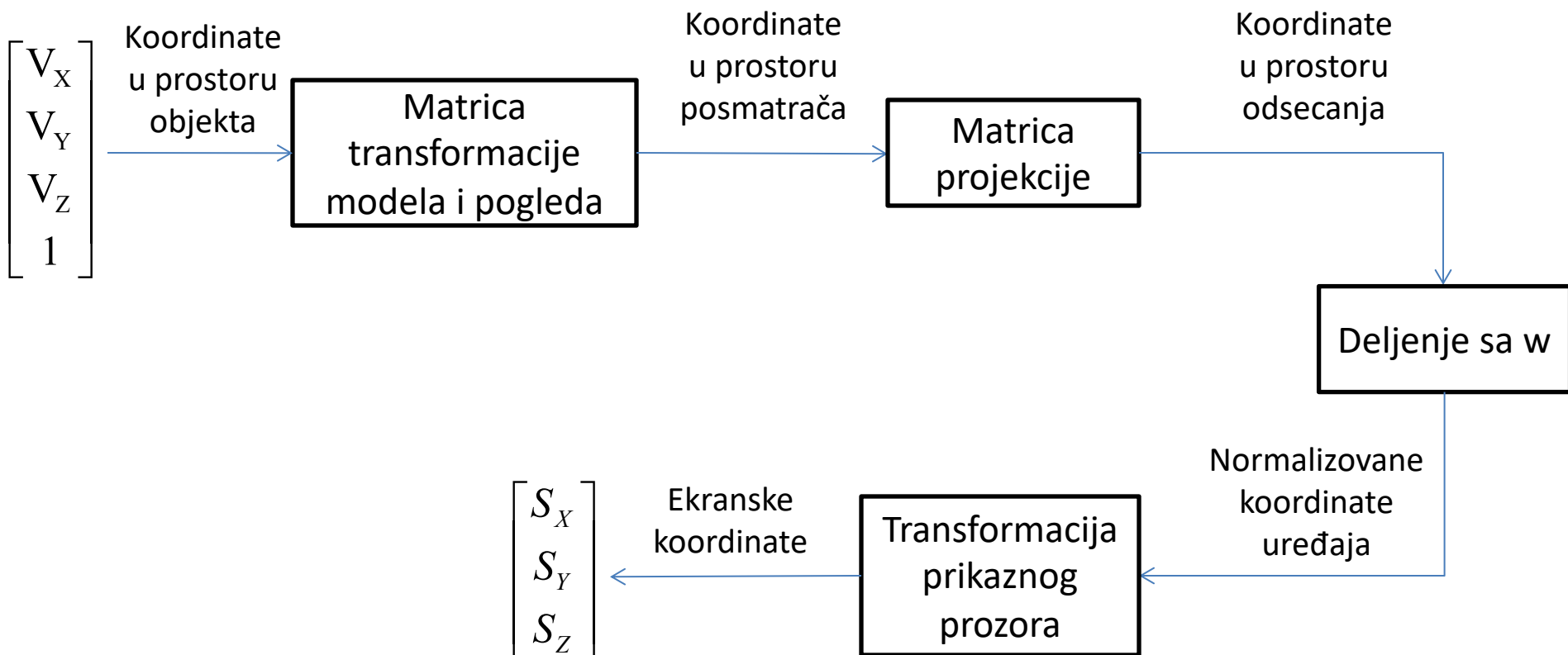


$$\mathbf{P}' = \mathbf{M}_{PROJ} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrica $\mathbf{M}_{PROJ}$ transformiše tačke iz k.s. posmatrača (kamere) u homogeni prostor odsecanja.

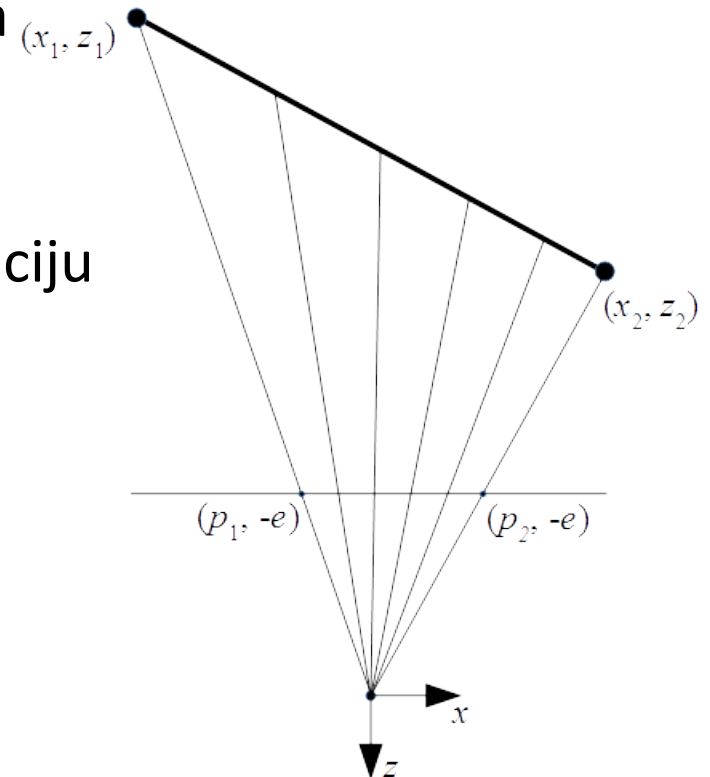
Preslikavanje iz 3D u 2D koordinate

Rekapitulacija



Ispravna interpolacija u projekciji sa perspektivom

- Temena nose informacije koje se interpoliraju (boja, osvetljaj, koordinate u prostoru tekstone, itd)
- Linearna interpolacija je neadekvatna (iako greška uglavnom nije primetna, osim za tekstone)
- Potrebno je izvršiti ispravnu interpolaciju



Ispravna interpolacija u projekciji sa perspektivom

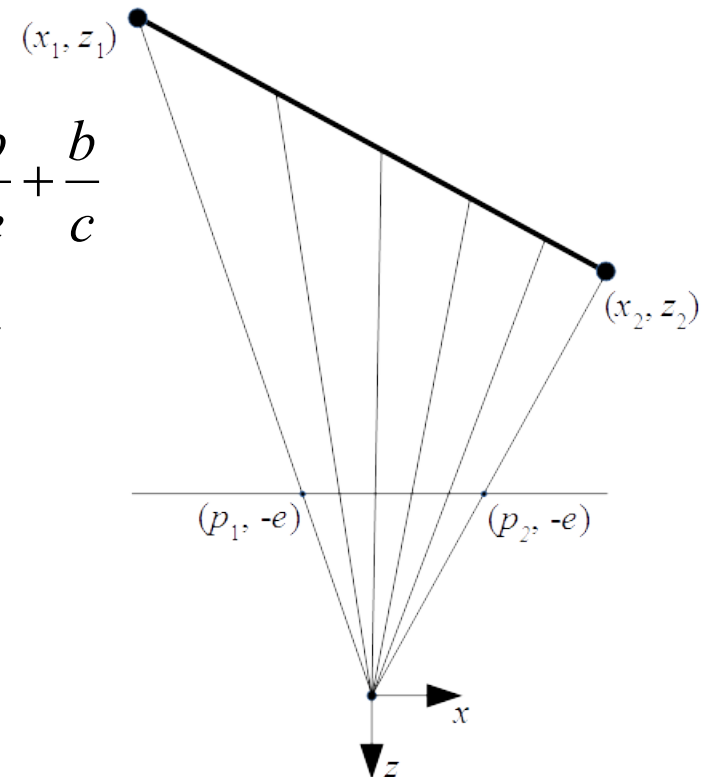
$ax + bz = c, c \neq 0$ Jednačina prave koja prolazi kroz tačke (x_1, z_1) i (x_2, z_2) .

Zrak iz $(0,0)$ koji preseca pravu u tački (x,z) ,
preseca projekcionu ravan u $(p,-e)$.

$$\frac{p}{x} = \frac{-e}{z} \longrightarrow \left(-\frac{ap}{e} + b \right) z = c \longrightarrow \frac{1}{z} = -\frac{ap}{ce} + \frac{b}{c}$$

Za $p_3 = (1-t)p_1 + t p_2$, dobija se:
$$\frac{1}{z_3} = \frac{1}{z_1} (1-t) + \frac{1}{z_2} t$$

Zaključak: recipročna vrednost z koordinate se ispravno
interpolira linearnom interpolacijom.



Ispravna interpolacija atributa temena

$$\frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \quad \leftarrow \quad z_3 = \frac{1}{\frac{1}{z_1}(1-t) + \frac{1}{z_2}t}$$



$$\boxed{\frac{a_3}{z_3} = \frac{a_1}{z_1}(1-t) + \frac{a_2}{z_2}t}$$

