Pronalaženje skrivenog znanja

Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu

Master akademske studije

modul Računarska tehnika i informatika

2019/2020

Linearna regresija

Vuk Batanović, Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu

Linearna regresija

- Osnovni tip regresije – predviđanja kontinualnih numeričkih vrednosti
- Prvi oblik linearne regresije predstavljen 1805. godine
- Prosta/jednostruka linearna regresija – postoji samo jedna ulazna promenljiva/odlika x
- Višestruka linearna regresija – postoji više (n) ulaznih promenljivih/odlika $x_1, x_2, \dots, x_n$
- Univarijantna linearna regresija – samo jedna izlazna promenljiva y
- Multivarijantna linearna regresija – više izlaznih promenljivih

Linearna regresija

- Linearna regresija pretpostavlja da zavisnost y od x ima oblik linearne kombinacije odlika (i njihovih težina)
- Dve glavne vrste upotrebe linearne regresije su:
  - Predviđanje vrednosti izlaza y za nove podatke na osnovu poznatih vrednosti tog izlaza na starim podacima
  - Analiza stepena povezanosti između vrednosti izlaza y i vrednosti promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n$
- Široko korišćena i u prirodnim i u društvenim naukama

Jednostruka univarijantna linearna regresija

- Hipoteza jednostruke univarijantne linearne regresije:

$$h(x) = w_0 + w_1 x$$

- w_0, w_1 su težine – parametri modela (negde se označavaju sa θ_0, θ_1)
- Obučavanje modela predstavlja odabir optimalnih vrednosti parametara modela tako da $h(x)$ bude blisko stvarnom y za sve ulazne parove (x, y)
- Da bi se model obučio neophodno je odabrati funkciju cene/greške koja govori koliko hipoteza (sa trenutnim vrednostima parametara) odskače od stvarnih vrednosti y

Funkcija gubitka i funkcija greške

- Funkcija gubitka $L(h(x), y)$ (engl. *loss function*) definiše meru odstupanja vrednosti hipoteze $h(x)$ (za neko x, sa trenutnim vrednostima parametara w) od tačne vrednosti y na pojedinačnom podatku
- Funkcija greške/cene $J(w)$ (engl. *error/cost function*) je prosek vrednosti funkcije gubitka na svim podacima iz posmatranog skupa:

$$J(w) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} L(h(x^{(i)}), y^{(i)})$$

- gde je m broj podataka u skupu
- Obučavanje modela se svodi na odabir optimalnih vrednosti parametara modela $w_0, \dots, w_n$ tako da funkcija greške $J(w)$ bude minimalna za parove (x, y) iz skupa za obučavanje

Funkcija greške u linearnoj regresiji

- U linearnoj regresiji se najčešće kao funkcija greške koristi prosek kvadrata odstupanja $h(x)$ od y (engl. *Mean Squared Error* – *MSE*):

$$J(w) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} \left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right)^2$$

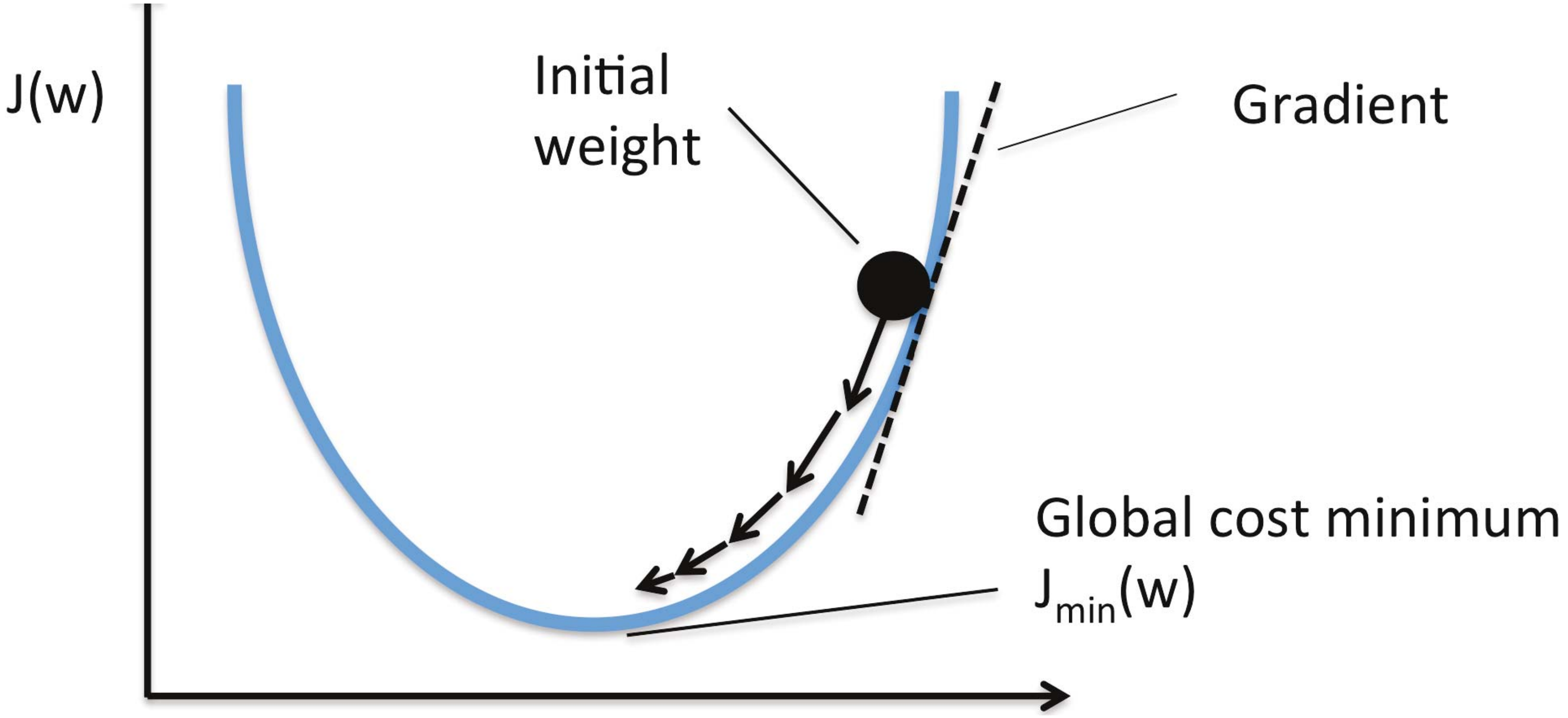
- Moguće je pronaći minimum analitički – podrazumeva računanje inverznih matrica
  - Može biti preskupa operacija kada je broj korišćenih odlika veliki

Obučavanje u linearnoj regresiji

- U praksi se najčešće za obučavanje modela koristi metoda gradijentnog spusta
- Gradijentni spust je iterativni metod traženja minimuma funkcije
- Zasniva se na korišćenju gradijenta – generalizacije izvoda na veći broj promenljivih
- Gradijent je vektor čiji su elementi parcijalni izvodi funkcije
- Gradijent funkcije greške:

$$\nabla J(w) = \left(\frac{\partial J(w)}{\partial w_0}, \frac{\partial J(w)}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial J(w)}{\partial w_n}\right)$$

- Parametre $w_0, \dots, w_n$ treba menjati u smeru opadanja funkcije greške



Ilustracija gradijentnog spusta

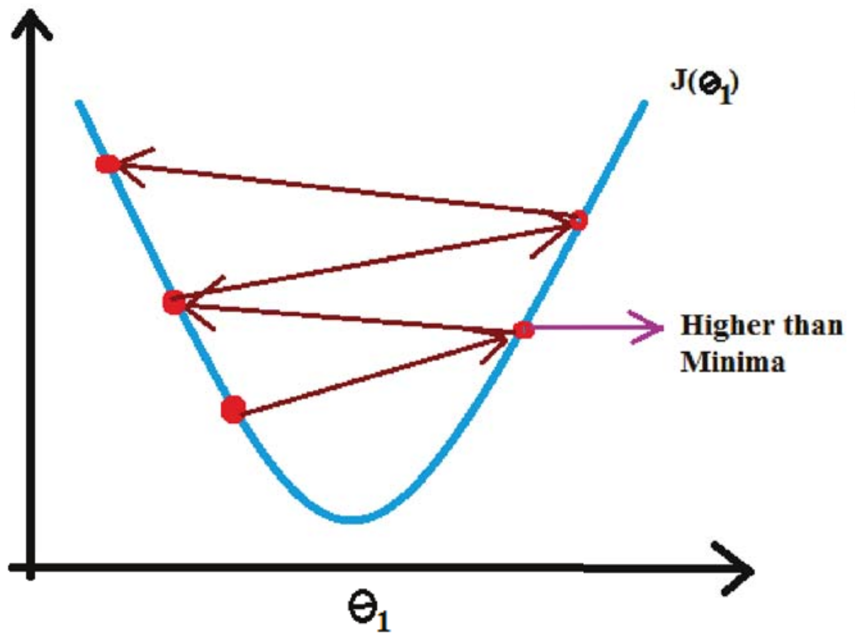
Slika preuzeta sa: http://sebastianraschka.com/faq/docs/closed-form-vs-gd.html

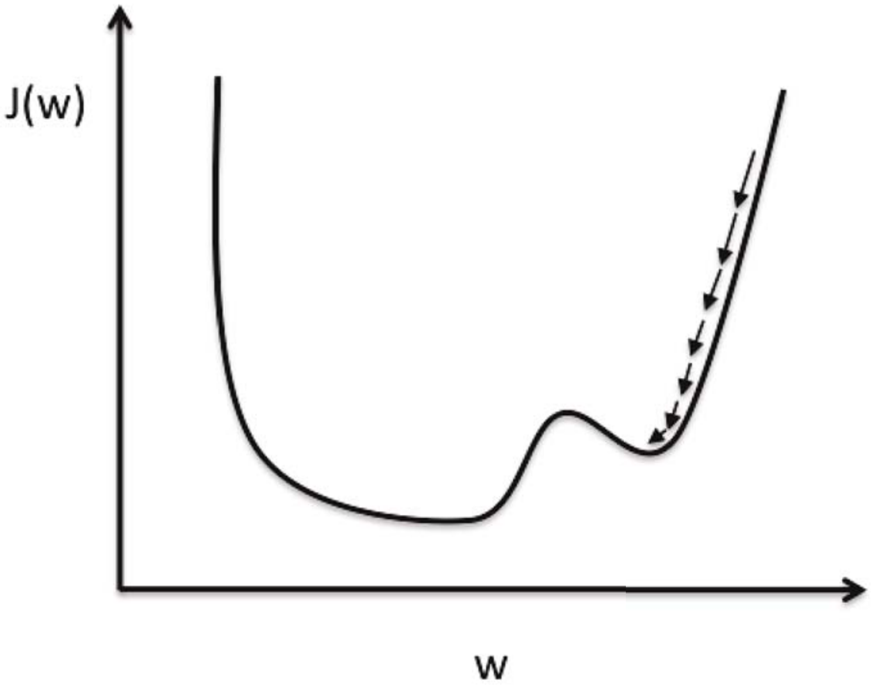
Gradijentni spust

- Izraz za ažuriranje težinskih vrednosti w:

$$w_i := w_i - \alpha \frac{\partial J(w)}{\partial w_i}$$

- α je pozitivan broj koji predstavlja brzinu učenja (engl. *learning rate*) – ona određuje koliko će se veliki skokovi niz gradijent praviti pri obučavanju
- Brzina učenja mora da bude pažljivo odabrana
  - Kada je α premalo učenje je veoma sporo tj. ima veliki broj koraka. U zavisnosti od oblika funkcije greške, moguće je i zaglavljivanje u lokalnim minimumima
  - Kada je α preveliko optimizacija može da preskoči minimum ili čak i da divergira





Ilustracija uticaja prevelike i premale brzine učenja na obučavanje modela

Slike preuzete sa:

http://wingshore.wordpress.com/2014/11/19/linear-regression-in-one-variable-gradient-descent-contd/

http://sebastianraschka.com/Articles/2015_singlelayer_neurons.html

Ažuriranje vrednosti parametara (primer jednostruke regresije)

- Obavezno treba ažurirati sve težinske vrednosti odjednom, na primer:

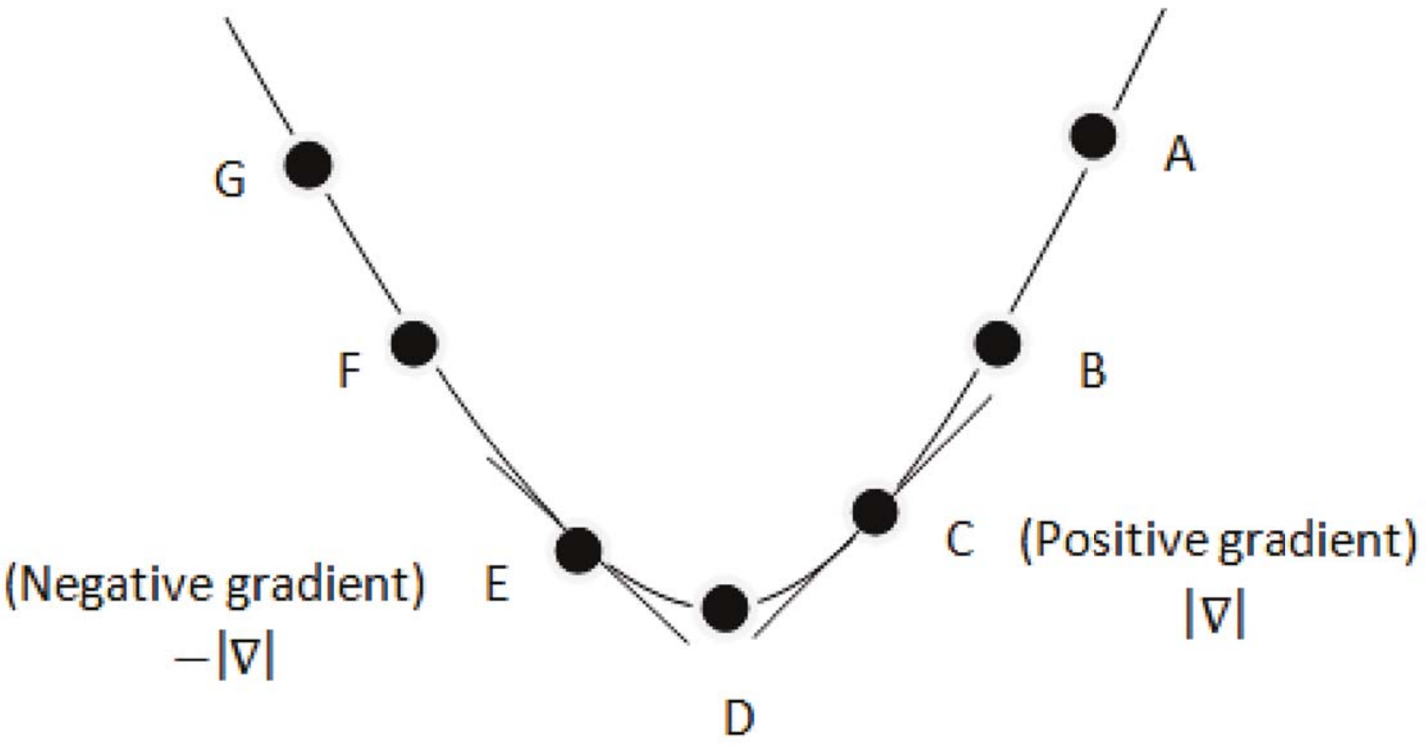
$$temp_0 \coloneqq w_0 - \alpha \frac{\partial J(w)}{\partial w_0}$$

$$temp_1 \coloneqq w_1 - \alpha \frac{\partial J(w)}{\partial w_1}$$

$$w_0 \coloneqq temp_0$$

$$w_1 \coloneqq temp_1$$

- U suprotnom, promena jednog parametra utiče na parcijalne izvode po drugim parametrima – više se ne vrši spust u smeru gradijenta



Ilustracija smera spusta u zavisnosti od trenutnog položaja

Slika preuzeta sa: http://stackoverflow.com/questions/21064030/gradient-descent-in-linear-regression

Konvergencija

- Gradijentni spust može da konvergira i sa fiksnom vrednošću brzine učenja α

$$w_i := w_i - \alpha \frac{\partial J(w)}{\partial w_i}$$

- Kako se spust približava minimumu, vrednost parcijalnih izvoda se sama smanjuje, tako da automatski dolazi do konvergencije
- Vrednost izvoda u minimumu je jednaka nuli, tako da se parametri w više ne menjaju kad dostignu optimalne vrednosti
- Obučavanje se nekad obustavlja kada promena vrednosti parametara u jednom koraku postane manja od neke predefinisane vrednosti

Konvergencija

- Ukoliko je brzina učenja dobro odabrana, gradijentni spust će uvek konvergirati ka globalnom minimumu
  - Funkcija greške $J(w)$ je kvadratna funkcija što znači da je konveksna tj. ima samo jedan minimum koji je globalan
- Broj koraka potrebnih za konvergenciju zavisi od konkretnog zadatka koji se rešava i može da znatno varira
- Automatska provera konvergencije – da li se greška smanjuje u svakom koraku?
  - Za dovoljno malo α greška treba da se smanjuje u svakom koraku

Obučavanje u jednostrukoj linearnoj regresiji pomoću gradijentnog spusta

$$J(w) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}\left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right)^2 = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}\left(w_0 + w_1 x^{(i)} - y^{(i)}\right)^2$$

$$\frac{\partial J(w)}{\partial w_0} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(w_0 + w_1 x^{(i)} - y^{(i)}\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right)$$

$$\frac{\partial J(w)}{\partial w_1} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(w_0 + w_1 x^{(i)} - y^{(i)}\right)x^{(i)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right)x^{(i)}$$

Obučavanje u jednostrukoj linearnoj regresiji pomoću gradijentnog spusta

- Algoritam spusta – ponavljati do konvergencije:

$$w_0 \coloneqq w_0 - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)} \right)$$

$$w_1 \coloneqq w_1 - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)} \right) x^{(i)}$$

- Ovakav režim obučavanja se naziva grupni gradijentni spust (engl. *batch gradient descent*), jer se u svakom koraku spusta koristi svih m podataka iz skupa za obučavanje

Stohastički gradijentni spust

- Alternativan pristup je da se podaci iz skupa za obučavanje obrađuju jedan po jedan, tj. da se parametri w ažuriraju do konvergencije kao:

$$randomly\ shuffle\ the\ data$$

$$for\ i = 1\ to\ m:$$

$$w_0 \coloneqq w_0 - \alpha \frac{1}{m}\left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right)$$

$$w_1 \coloneqq w_1 - \alpha \frac{1}{m}\left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right)x^{(i)}$$

- Ovakav režim obučavanja se naziva stohastički gradijentni spust (engl. *stochastic gradient descent* – SGD)

Grupni vs stohastički gradijentni spust

- Grupni gradijentni spust mora da prođe kroz ceo skup za obučavanje da bi napravio jedan korak
  - Ovo može da bude skupa operacija ako je broj podataka m veliki
- Stohastički gradijentni spust može da krene sa minimizacijom funkcije greške na osnovu samo jednog podatka
- Stohastički spust se često približi minimumu znatno brže nego grupni
- Stohastički spust ima veću varijansu nego grupni jer je svaki gradijent nešto drugačiji
  - Veća varijansa usporava konvergenciju
  - Zahteva da brzina učenja α vremenom opada

Grupni vs stohastički gradijentni spust

- Može se desiti da stohastički spust nikad ne konvergira sasvim, već da vrednosti w blago osciluju oko minimuma
  - Uglavnom nije problem jer su vrednosti oko minimuma obično dovoljno dobre
- Zbog efikasnosti se kod velikih skupova podataka preferira stohastički spust
- Stohastički spust je pogodan za *online* obučavanje – situacije kada novi podaci pristižu sekvencijalno
- Kao kompromis se često koristi obučavanje na manjim podskupovima podataka (engl. *mini-batch gradient descent*)

Višestruka univarijantna linearna regresija

- Hipoteza višestruke univarijantne linearne regresije:

$$h(x) = w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n$$

- $w_0, w_1, \dots, w_n$ su težine – parametri modela
- $x_0, x_1, \dots, x_n$ su odlike koje se koriste u modelu
- Funkcija greške sada ima oblik:

$$J(w) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} \left(w_0 + w_1 x_1^{(i)} + w_2 x_2^{(i)} + \cdots + w_n x_n^{(i)} - y^{(i)} \right)^2$$

Obučavanje u višestrukoj linearnoj regresiji pomoću grupnog gradijentnog spusta

$$\frac{\partial J(w)}{\partial w_0} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right)$$

$$\frac{\partial J(w)}{\partial w_1} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right)x_1^{(i)}$$

$$\frac{\partial J(w)}{\partial w_2} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right)x_2^{(i)}$$

$$\vdots$$

Obučavanje u višestrukoj linearnoj regresiji pomoću grupnog gradijentnog spusta

- Algoritam spusta – ponavljati do konvergencije:

$$w_0 \coloneqq w_0 - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right)$$

$$w_1 \coloneqq w_1 - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right) x_1^{(i)}$$

$$w_2 \coloneqq w_2 - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right) x_2^{(i)}$$

$$\vdots$$

Obučavanje u višestrukoj linearnoj regresiji pomoću stohastičkog gradijentnog spusta

Algoritam spusta – ponavljati do konvergencije:

$randomly\ shuffle\ the\ data$

$for\ i = 1\ to\ m:$

$$w_0 := w_0 - \alpha \frac{1}{m}\left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right)$$

$$w_1 := w_1 - \alpha \frac{1}{m}\left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right)x_1^{(i)}$$

$$w_2 := w_2 - \alpha \frac{1}{m}\left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right)x_2^{(i)}$$

$$\vdots$$

Skaliranje vrednosti odlika

- U grupnom gradijentnom spustu težinske vrednosti se ažuriraju kao:

$$w_r := w_r - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right) x_r^{(i)}$$

- a u stohastičkom kao:

$$w_r := w_r - \alpha \frac{1}{m} \left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right) x_r^{(i)}$$

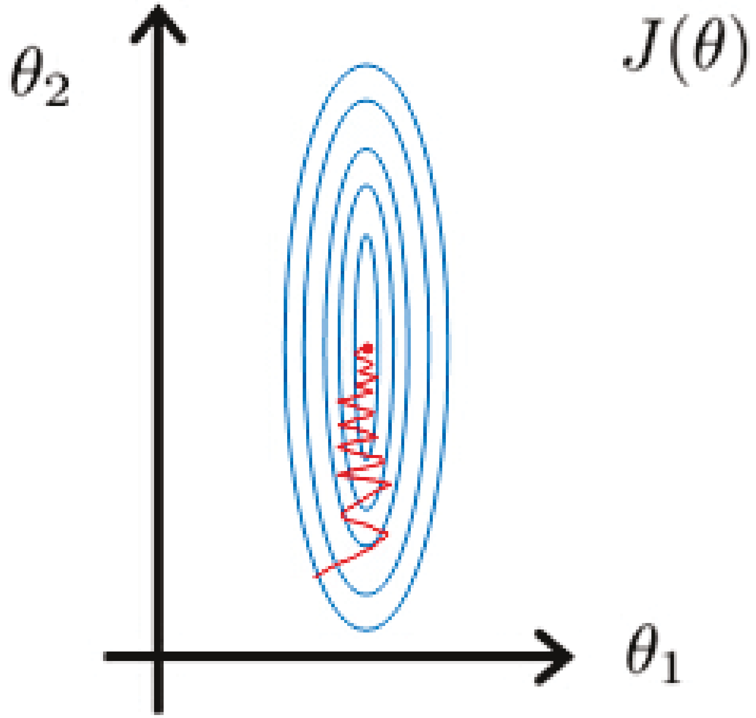
- Brzina učenja α je ista za sve težinske parametre, te stoga mora da se bira prema onom parametru gde je magnituda vrednosti odlike najveća (da bi se sprečila divergencija)
  - Veliki broj koraka u gradijentnom spustu i puno cik-cak kretanja, pošto neki težinski parametri konvergiraju brže od drugih

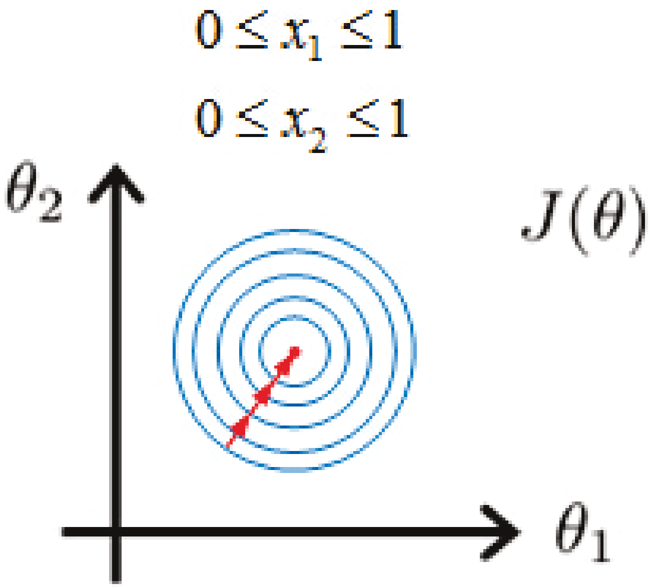
Skaliranje vrednosti odlika

- Gradijentni spust brže konvergira kada se vrednosti svih odlika nalaze u sličnim opsezima
  - Put do minimuma je brži i direktniji tj. ima manje cik-cak kretanja
- Skaliranje vrednosti odlika se obično radi tako da vrednosti budu u opsegu:

$$-1 \leq x \leq 1$$

- Moguće je i da se skaliranje vrši tako da srednja vrednost odlike bude jednaka nuli
- Nije neophodno da vrednosti svih odlika budu u apsolutno identičnim opsezima – manja odstupanja neće znatno uticati na brzinu spusta





Ilustracija efekta skaliranja vrednosti odlika

Slika preuzeta sa: http://m.blog.csdn.net/article/details?id=50670674

Polinomijalna regresija

- Moguće je stepenovati vrednosti odlika – time se dobija polinomijalna regresija
- Jednostruka polinomijalna regresija:

$$h(x) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2$$

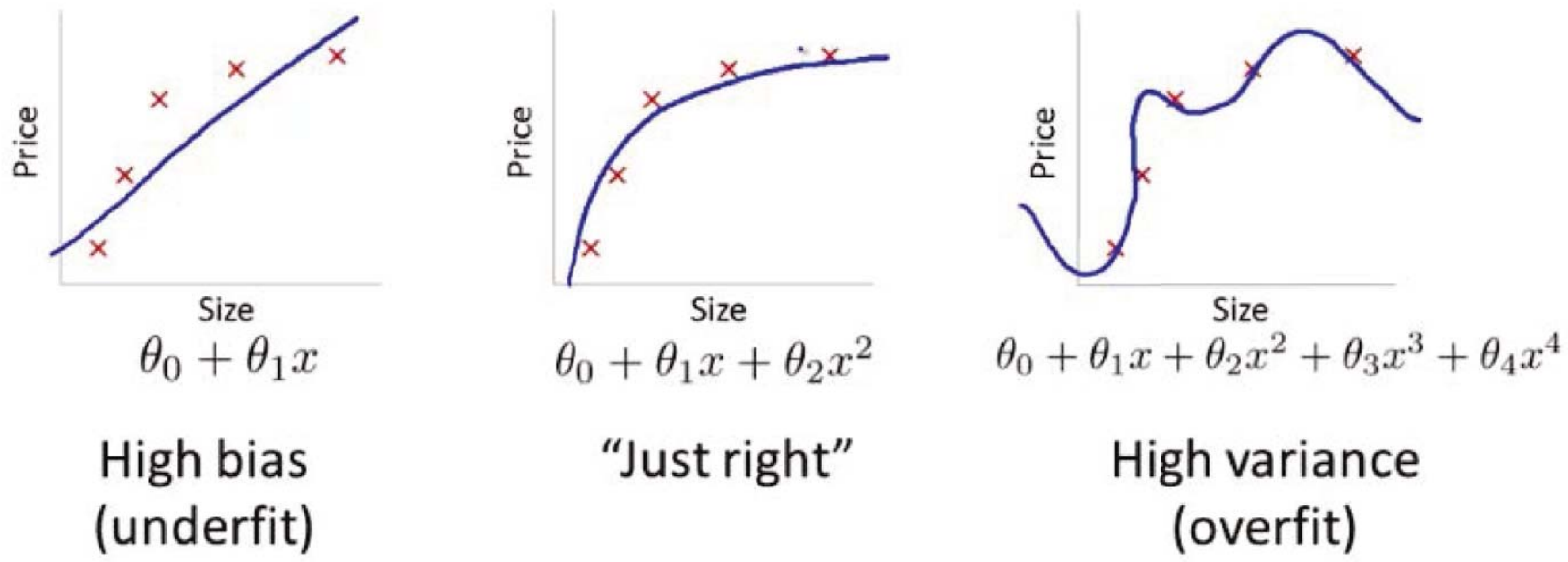
- Takođe je moguće kombinovati odlike, čime se dobija višestruka polinomijalna regresija:

$$h(x) = w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_1 x_2 + w_4 x_1^2 + w_5 x_2^2$$

- Skaliranje vrednosti odlika je naročito važno kod višestruke polinomijalne regresije

Polinomijalna regresija

- Polinomijalni modeli višeg stepena mogu zbog veće složenosti lako postati preterano prilagođeni podacima nad kojima se obučavaju
- Polinomijalni modeli su uglavnom dosta loši izvan opsega podataka korišćenih pri obučavanju – polinomijalne funkcije imaju „repove“
    - To ih čini veoma lošim za ekstrapolaciju
- Iako je regresija sada nelinearna, model je i dalje linearan jer predstavlja linearnu kombinaciju parametara



Ilustracija ponašanja jednostruke linearne i polinomijalne regresije

Slika preuzeta sa: Andrew Ng, Machine Learning, Coursera

Regularizacija

- Regularizacija je način sprečavanja preterane prilagođenosti modela podacima (engl. *overfitting*-a) penalizovanjem izuzetno velikih magnituda nekih parametara w
  - Jako velike magnitude nekih parametara w nastaju kao posledica pokušaja modela da prilagodi oblik funkcije izlaza šumu i izuzecima u podacima za obučavanje (radi smanjenja funkcije greške)
  - Takvi modeli se u određenim situacijama (tj. za određene vrednosti ulaznog podatka) efektivno rukovode samo malim brojem odlika (ili njihovih kombinacija) koje imaju velike magnitude w
- Šire govoreći, pod regularizacijom se podrazumeva bilo koji postupak koji za cilj ima smanjenje greške generalizacije (tj. greške nad novim podacima/skupom za testiranje) a da se pritom ne poveća greška nad skupom za obučavanje

Regularizacija

- Primer – predikcija cene akcija na berzi
  - Preterano prilagođen model će možda zaključiti da su, uprkos opštim trendovima kretanja cena akcija, akcije *Apple*-a skočile u određenom trenutku zato što akcije firmi koje imaju kapitalizaciju veću od 105 milijardi dolara i prethodnu cenu akcija manju od $145 rastu 165. dana u godini
  - Model verovatno ne može da zbog ovog neuobičajenog primera menja vrednosti težinskih parametara za odlike/kombinacije odlika koje realno jesu prediktivne, jer će time povećati grešku na svim ostalim podacima
  - Ta veoma specifična kombinacija odlika najverovatnije nema uticaja ni na jedan drugi podatak u skupu za obučavanje, a omogućava modelu da tačno pogodi cenu akcija *Apple*-a u posmatranom trenutku
  - Stoga će model toj kombinaciji odlika dati veliku težinu

Nastavite sekvencu brojeva: 1, 3, 5, 7, ?

Primer javljanja velikih magnituda težinskih parametara kod preterano prilagođenih modela

Nastavite sekvencu brojeva:
1, 3, 5, 7, ?

Tačan odgovor:
1, 3, 5, 7, 217341

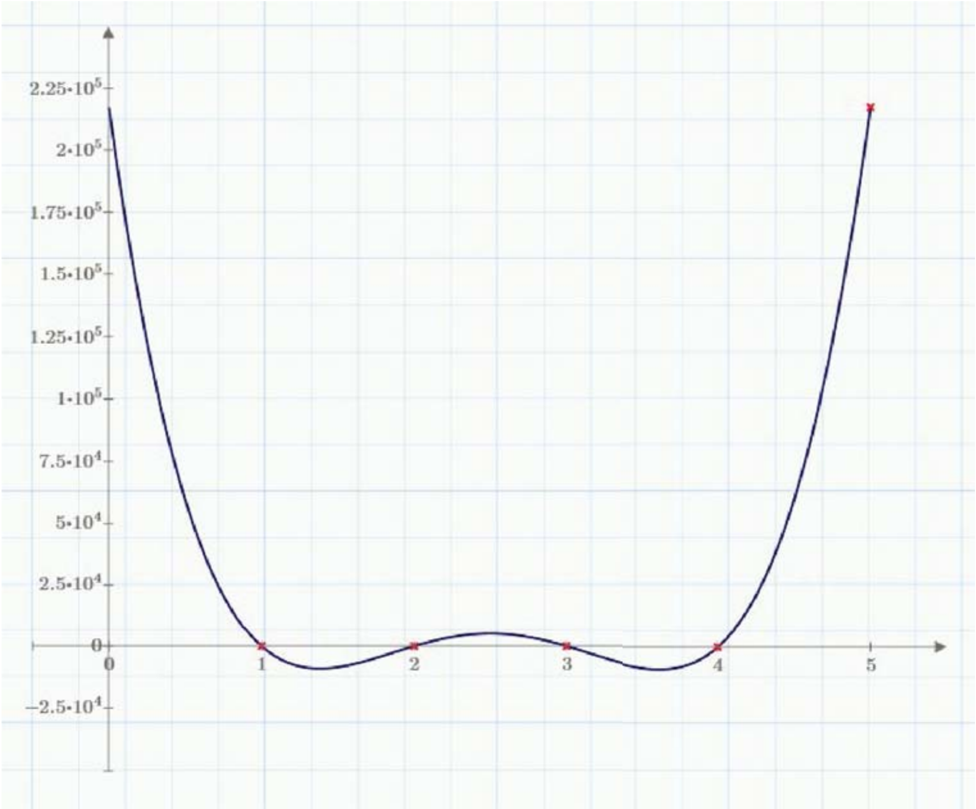
Primer javljanja velikih magnituda težinskih parametara kod preterano prilagođenih modela

$$f(x) := \frac{18111}{2} x^4 - 90555 x^3 + \frac{633885}{2} x^2 - 452773 x + 217331$$

$$f(1) = 1$$
$$f(2) = 3$$
$$f(3) = 5$$
$$f(4) = 7$$
$$f(5) = 217341$$

Primer javljanja velikih magnituda težinskih parametara kod preterano prilagođenih modela

Slike preuzete sa: http://blogs.ptc.com/2015/01/22/i-bet-you-cant-guess-the-next-value-in-the-sequence/



Primer javljanja velikih magnituda težinskih parametara kod preterano prilagođenih modela

Slika preuzeta sa: http://blogs.ptc.com/2015/01/22/i-bet-you-cant-guess-the-next-value-in-the-sequence/

Regularizacija

- Kod preterano prilagođenih modela funkcija izlaza je veoma vijugava (i samim tim kompleksna) iz nastojanja da se greška na skupu za obučavanje smanji koliko god to fleksibilnost modela dozvoljava
  - To je posledica postojanja šuma u podacima za obučavanje i/ili nedovoljno podataka
- Regularizacija je dobila ime po tome što joj je cilj da funkciju izlaza učini regularnijom tj. pravilnijom, čime se sprečava preterana prilagođenost modela
- Model se regularizuje tako što se u funkciju greške ubacuje regularizacioni izraz $\lambda R(w)$, čime se forsiraju manje magnitude w
  - λ – hiperparametar modela koji određuje jačinu regularizacije
  - $R(w)$ - regularizaciona funkcija

Regularizacija

- Regularizacija takođe smanjuje nelinearnost modela (ako je ima)
- Vrednost hiperparametra λ se obično određuje eksperimentalno, korišćenjem unakrsne validacije
  - Ukoliko se unakrsna validacija koristi i za evaluaciju modela, neophodno je primeniti ugnežđenu unakrsnu validaciju za izbor hiperparametra λ
  - Previše mala vrednost λ – regularizacija neće imati (dovoljnog) efekta
  - Previše velika vrednost λ
    - Dovodi do nedovoljne prilagođenosti modela podacima (engl. *underfitting*)
    - Gradijentni spust neće uspeti da konvergira
- Pošto vrednosti w zavise i od vrednosti odlika, obično se pre regularizacije sprovodi skaliranje vrednosti odlika

Regularizacija

- Regularizaciona funkcija $R(w)$ je p-norma vektora parametara w (pri čemu se samostalni član w_0 obično izuzima):

$$\|w\|_p = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n} |w_j|^p}$$

- U čestoj upotrebi su
  - L_2 / Tihonovljeva regularizacija:

$$R(w) = \|w\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} w_j{}^2$$

  - L_1 regularizacija:

$$R(w) = \|w\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |w_j|$$

Grebena regresija

- Grebena (engl. *ridge*) regresija je termin koji se koristi za linearnu regresiju sa L_2 regularizacijom
- Funkcija greške kod grebene regresije je:

$$J(w) = \frac{1}{2m}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(w_0 + w_1 x_1^{(i)} + \cdots + w_n x_n^{(i)} - y^{(i)}\right)^2 + \lambda \sum_{j=1}^{n} w_j^2\right)$$

- Parcijalni izvodi kod grebene regresije imaju oblik:

$$\frac{\partial J(w)}{\partial w_r} = \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right)x_r^{(i)} + \lambda w_r\right)$$

Grebena regresija

- Parametri w se u grebenoj regresiji ažuriraju na sledeći način:

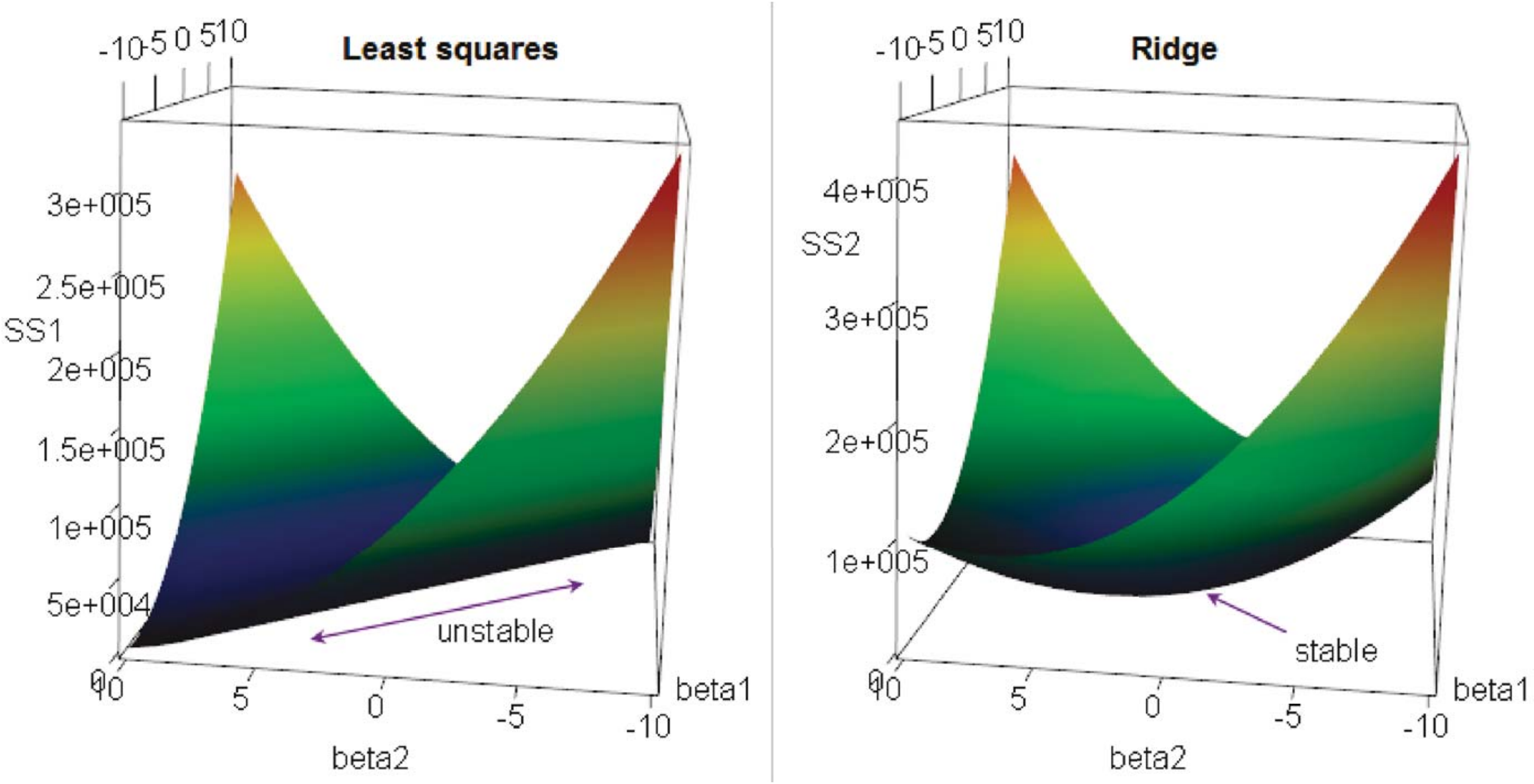
$$w_r := w_r - \alpha \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} \left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right) x_r^{(i)} + \lambda w_r\right)$$

$$= w_r \left(1 - \alpha \frac{\lambda}{m}\right) - \alpha \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} \left(h\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right) x_r^{(i)}\right)$$

- Pošto regularizacija obično ne obuhvata w_0, pravilo ažuriranja za w_0 ostaje isto kao u neregularizovanoj regresiji

Grebena regresija

- Ako postoji visoka korelisanost između odlika, funkcija cene neregularizovane linearne regresije nema jedinstven minimum, već „greben“ minimalnih vrednosti
  - To čini model nestabilnim – male promene u ulaznim podacima dovode do velikih promena u vrednostima težinskih parametara
  - Ova nestabilnost otežava interpretaciju modela
- L_2 regularizacija zamenjuje greben jedinstvenim minimumom



Ilustracija efekta uvođenja L_2 regularizacije

Slika preuzeta sa: http://stats.stackexchange.com/questions/151304/why-is-ridge-regression-called-ridge-why-is-it-needed-and-what-happens-when

LASSO regresija

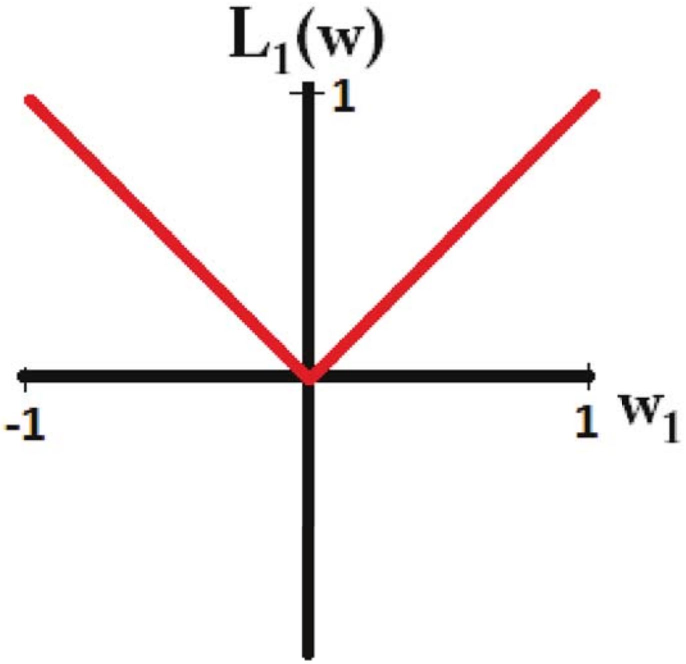
- LASSO (engl. *Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*) regresija je termin koji se koristi za linearnu regresiju sa L_1 regularizacijom
- Funkcija greške kod LASSO regresije je:

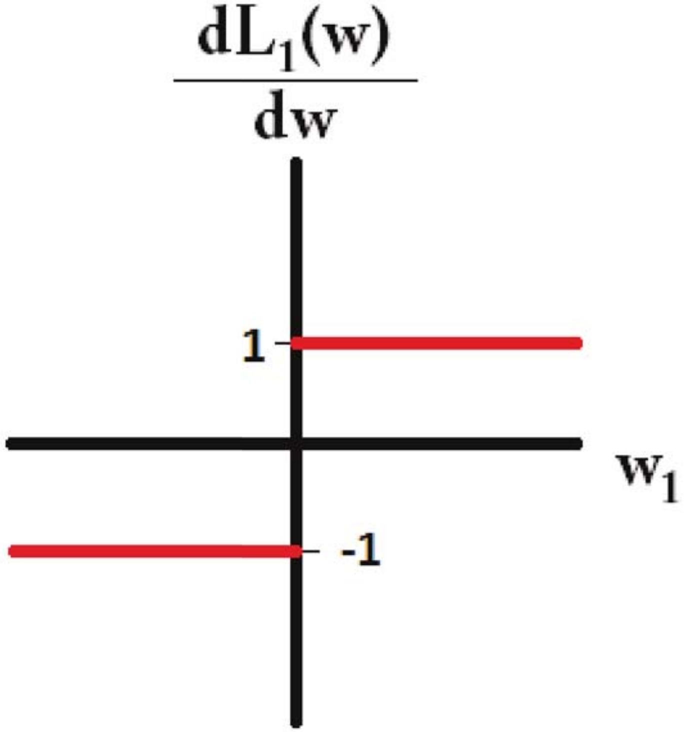
$$J(w) = \frac{1}{2m}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(w_0 + w_1 x_1^{(i)} + \cdots + w_n x_n^{(i)} - y^{(i)}\right)^2 + \lambda \sum_{j=1}^{n} |w_j|\right)$$

- L_1 regularizator nije diferencijabilan zbog apsolutne vrednosti
- Za ažuriranje vrednosti w koriste se napredniji mehanizmi optimizacije, kao što su subgradijentne metode
  - Koordinatni spust
  - Proksimalne metode

LASSO regresija

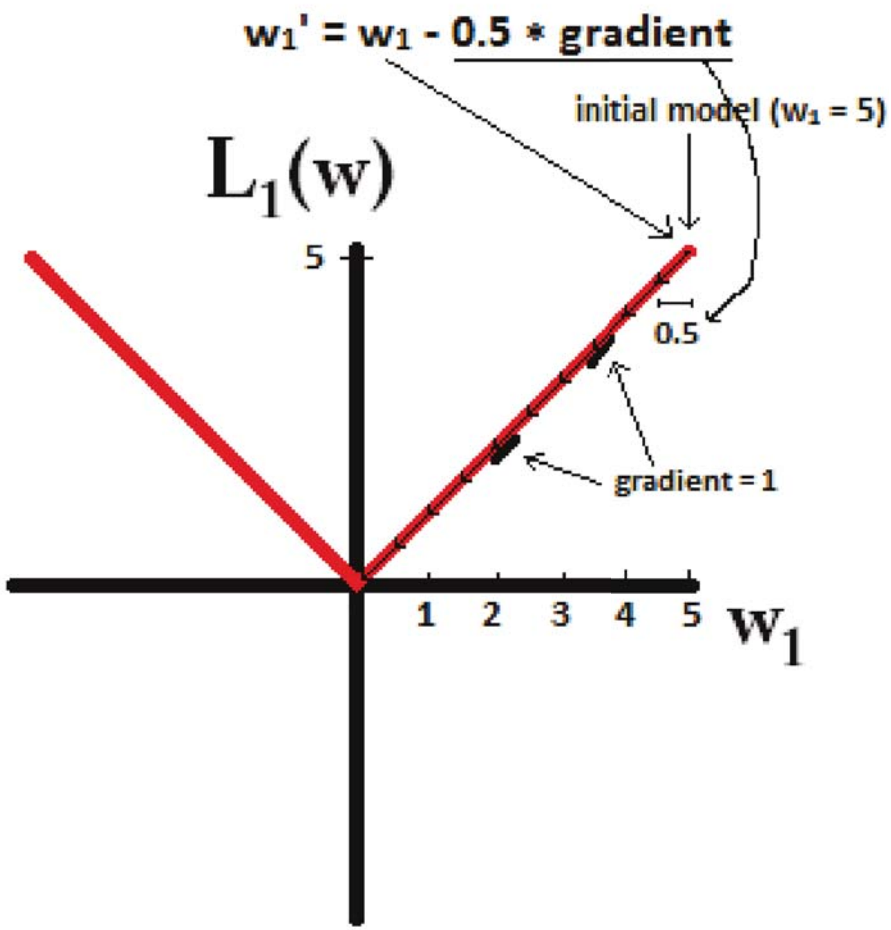
- L_1 regularizacija uz dovoljno veliku vrednost λ forsira određene težinske vrednosti w da postanu jednake nuli
  - Time se stvaraju proređeni modeli (engl. *sparse models*) zato što se odlike čije su težine jednake nuli efektivno ignorišu
  - Kako se vrednost λ povećava, raste i broj težinskih vrednosti postavljenih na nulu
- Ovo je korisno kada je potrebno istovremeno sprovesti i regularizaciju i selekciju odlika
  - Može biti dobro kada u modelu postoji ogroman broj odlika





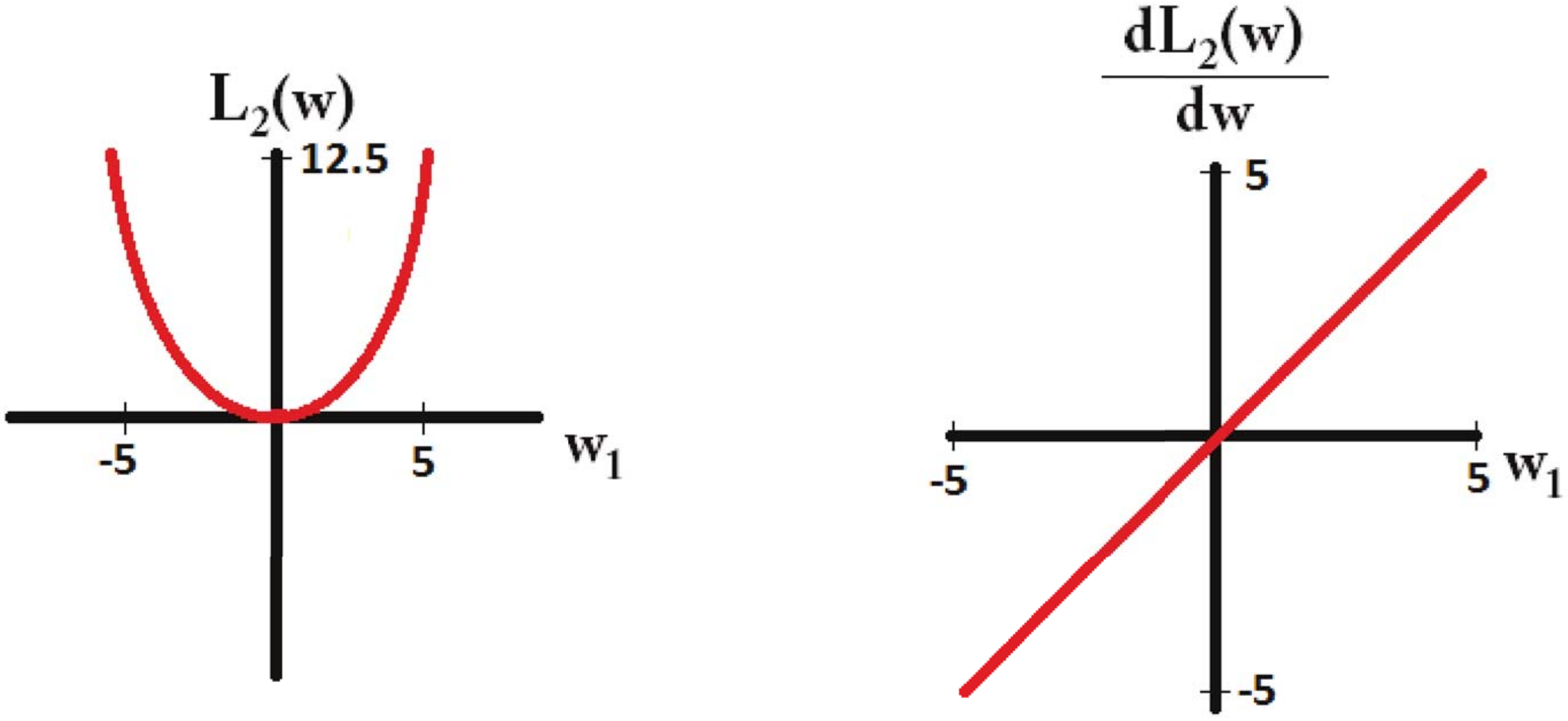
Oblik funkcije L_1 regularizacije i njenog izvoda

Slika preuzeta sa: http://stats.stackexchange.com/questions/45643/why-l1-norm-for-sparse-models/



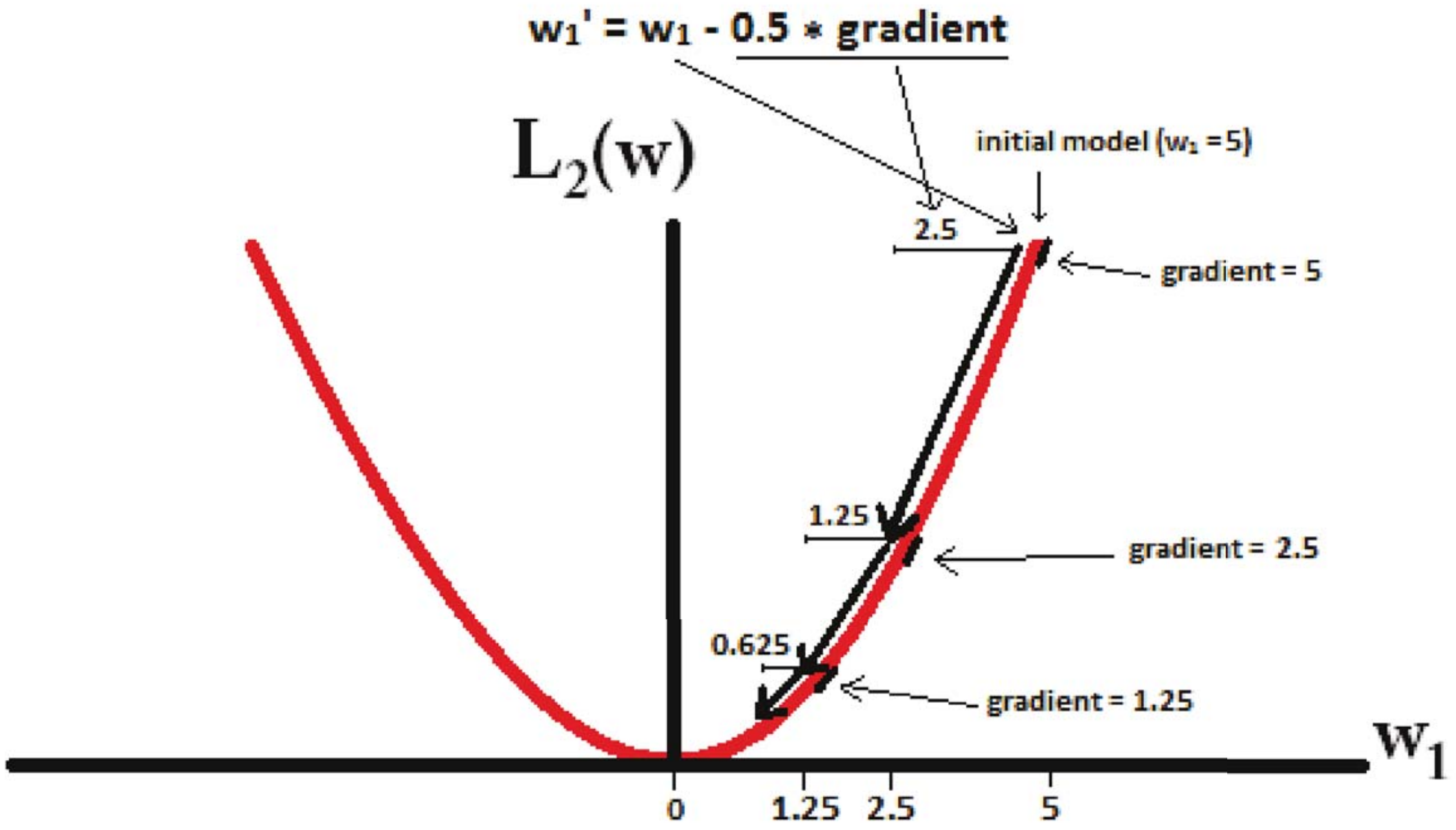
Promena vrednosti w pri gradijentnom spustu kod L_1 regularizacije

Slika preuzeta sa: http://stats.stackexchange.com/questions/45643/why-l1-norm-for-sparse-models/



Oblik funkcije L_2 regularizacije i njenog izvoda

Slika preuzeta sa: http://stats.stackexchange.com/questions/45643/why-l1-norm-for-sparse-models/



Promena vrednosti w pri gradijentnom spustu kod L_2 regularizacije

Slika preuzeta sa: http://stats.stackexchange.com/questions/45643/why-l1-norm-for-sparse-models/

L_1 vs L_2 regularizacija

- Minimizacija vrednosti w
  - L_1 regularizacija dovodi do toga da neki parametri postanu jednaki nuli
    - Vrši selekciju odlika
    - Povećava interpretabilnost modela
  - L_2 regularizacija u principu nema ovu osobinu, te stoga ne može da se koristi za selekciju odlika
    - Teorijski je moguće da neki parametar postane jednak nuli za određenu vrednost brzine učenja α ili kao posledica smanjenja funkcije greške
- Broj odlika koje utiču na izlaz
  - Mali broj odlika koje imaju veliki uticaj – L_1 regularizacija
  - Veliki broj odlika koje imaju međusobno uravnotežen uticaj – L_2 regularizacija

L_1 vs L_2 regularizacija

- L_1 regularizacija je manje stabilna od L_2 regularizacije
  - Male promene u podacima za obučavanje mogu dovesti do velikih promena modela kada se koristi L_1 regularizacija
  - L_2 regularizovani modeli su otporniji na ove efekte
- L_2 regularizacija može da bude brža za izračunavanje
- Izbor napraviti pomoću unakrsne validacije na konkretnom skupu podataka

Prednosti i mane linearne regresije

- Prednosti
  - Jednostavnost
  - Interpretabilnost – veća težina dodeljena odlici signalizira njenu veću važnost (ako su vrednosti odlika skalirane)
    - Treba biti oprezan - interpretabilnost je znatno otežana ako postoji međusobna zavisnost između odlika
  - Često ostvaruje dosta dobru predikciju budućih podataka
- Mane
  - Realne regresione funkcije su skoro uvek nelinearne
  - Osetljivost na *outlier*-e