

Računarska grafika - vežbe

5 – Transformacije u 3D grafici

Transformacije u 3D grafici

Slično kao i u 2D grafici, uz razlike:

- matrice su 4x4
- postoji posebna matrica projekcije

Konvencije:

- desni pravougli koordinatni sistem
- pokretna virtuelna kamera – koordinatni sistem vezan za nju
- pozitivan smer rotacije oko ose koordinatnog sistema:
 - suprotno od smera kazaljke na satu
 - posmatrano prema koordinatnom početku

Zadatak 1

U desnom pravouglom koordinatnom sistemu (X-Y-Z) zadata je piramida temenima:

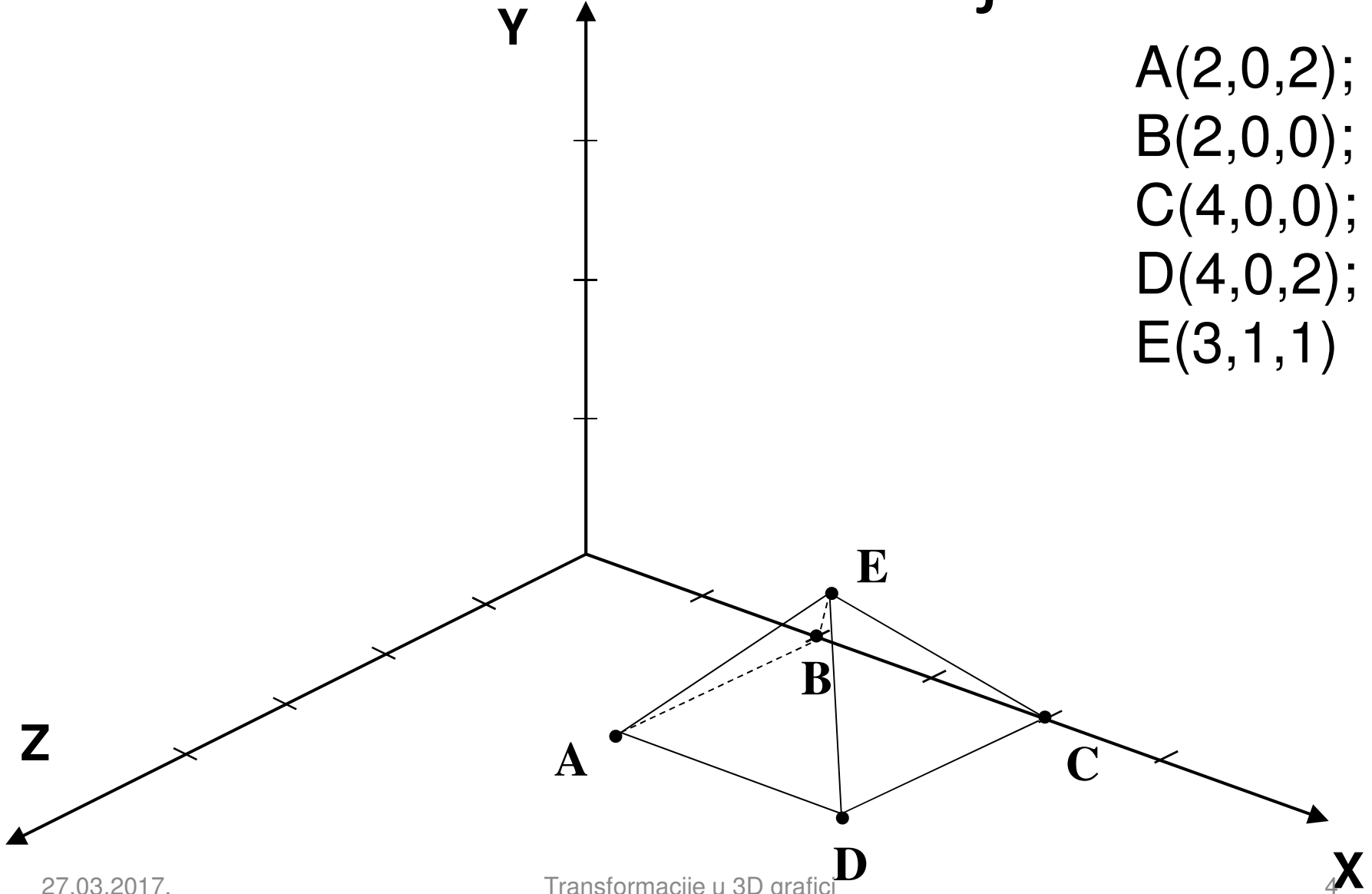
$A(2,0,2)$; $B(2,0,0)$; $C(4,0,0)$; $D(4,0,2)$; $E(3,1,1)$.

Ukoliko se koordinatni sistem najpre rotira oko X-ose u suprotnom smeru od kazaljke sata za ugao $\alpha=45^\circ$, zatim translira u pravcu i smeru pozitivne X-ose tako da se tačka E nađe u Y-Z ravni i konačno rotira oko Y ose u smeru kazaljke sata za ugao $\beta=45^\circ$, odrediti:

1. kompozitnu matricu transformacije
2. koordinate svih temena
u transformisanom koordinatnom sistemu
3. koordinate projekcija svih temena u perspektivi,
ako se posmatrač nalazi u tački $P(0,0,5)$

Zadatak 1 – rešenje

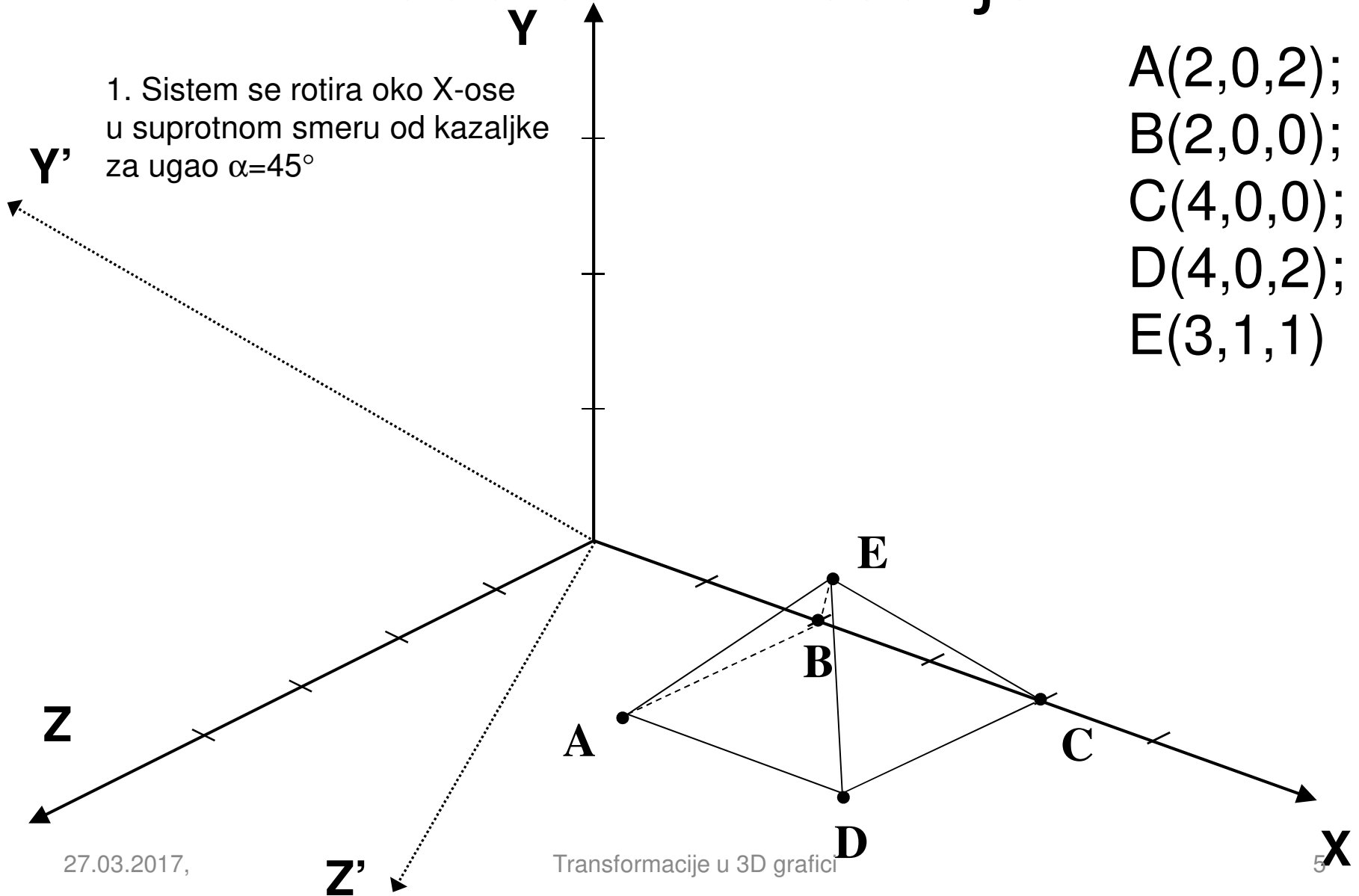
$A(2,0,2);$
 $B(2,0,0);$
 $C(4,0,0);$
 $D(4,0,2);$
 $E(3,1,1)$



Zadatak 1 – rešenje

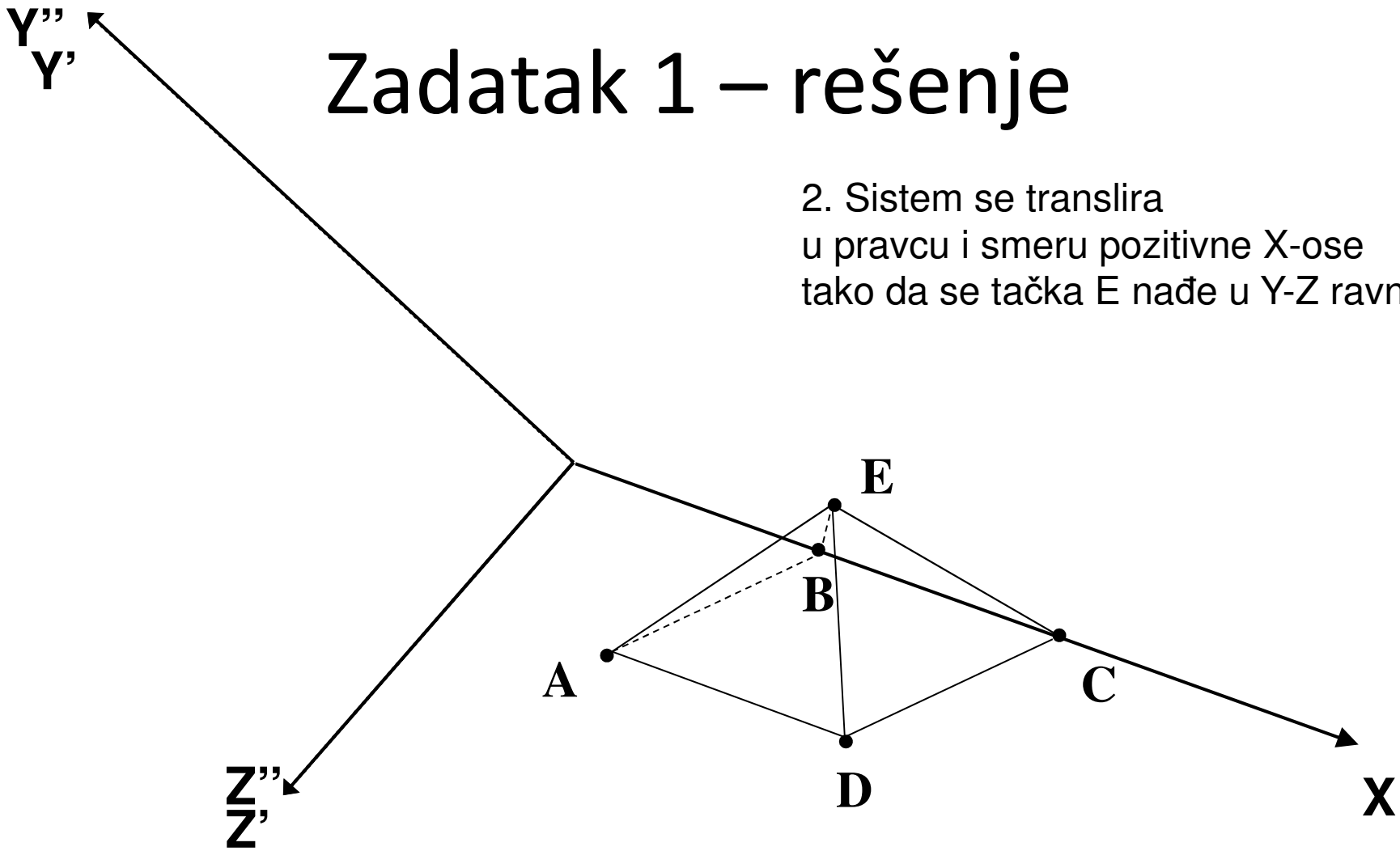
1. Sistem se rotira oko X-ose
u suprotnom smeru od kazaljke
za ugao $\alpha=45^\circ$

A(2,0,2);
B(2,0,0);
C(4,0,0);
D(4,0,2);
E(3,1,1)



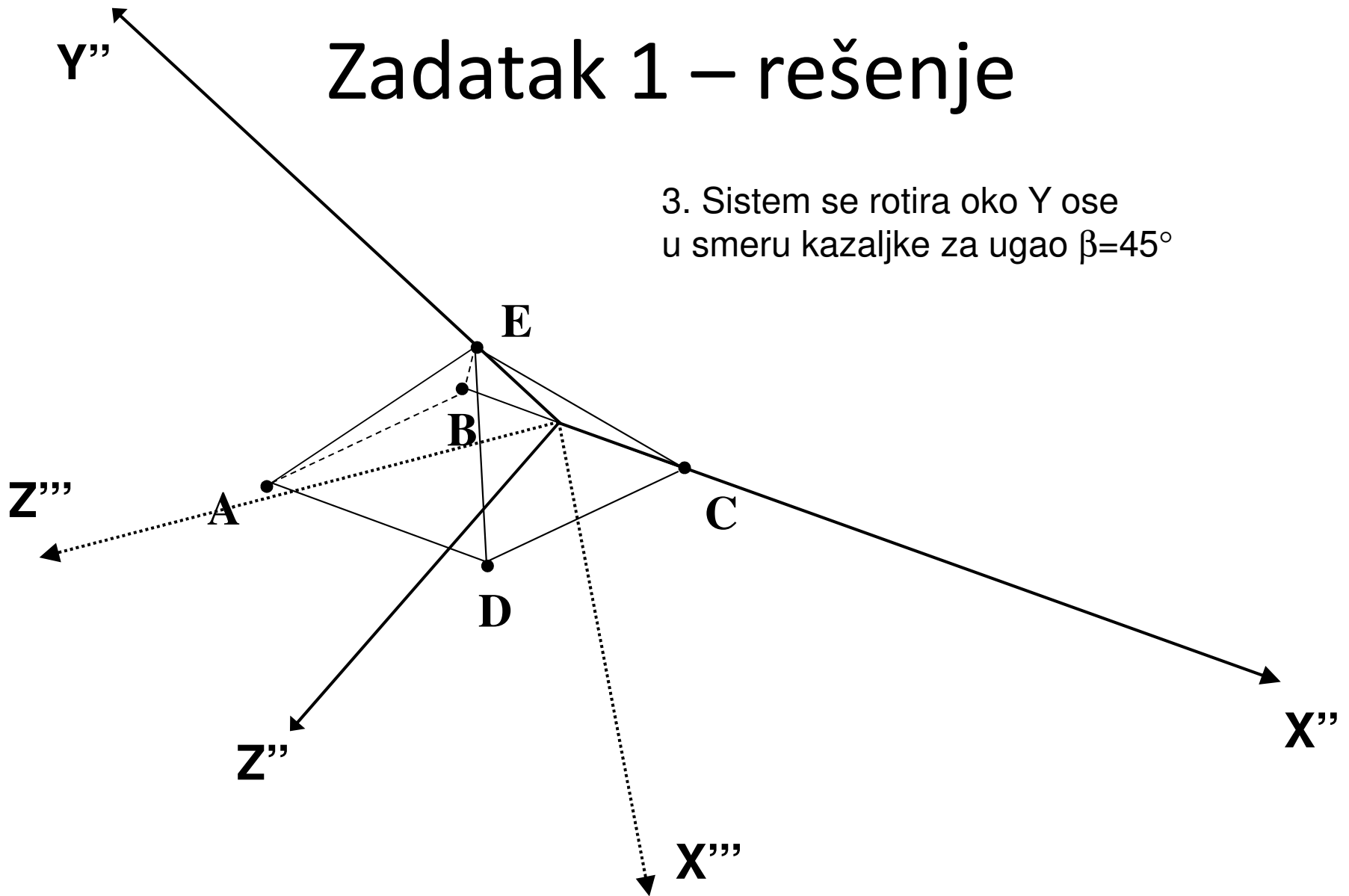
Zadatak 1 – rešenje

2. Sistem se translira
u pravcu i smeru pozitivne X-ose
tako da se tačka E nađe u Y-Z ravni



Zadatak 1 – rešenje

3. Sistem se rotira oko Y ose
u smeru kazaljke za ugao $\beta=45^\circ$



Zadatak 1 – rešenje

a) Kompozitna matrica transformacije: $M=R_x*T*R_y$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & 0 \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$A' = [2 \ 0 \ 2 \ 1] * M = (0.293, 1.414, 1.707)$$

$$B' = [2 \ 0 \ 0 \ 1] * M = (-0.707, 0, 0.707)$$

$$C' = [4 \ 0 \ 0 \ 1] * M = (0.707, 0, -0.707)$$

$$D' = [4 \ 0 \ 2 \ 1] * M = (1.707, 1.414, 0.293)$$

$$E' = [3 \ 1 \ 1 \ 1] * M = (0, 1.414, 0)$$

Zadatak 1 – rešenje

Projekcija: posmatrač nalazi u tački P(0,0,5)

$$A'' = A' * P_p * (1/w)$$

$$A' * P_p = [0.293, 1.414, 1.707 \ 1] * P_p = [0.293 \ 1.414 \ 0 \ 0.6586]$$

$$A'' = [0.293 \ 1.414 \ 0 \ 0.6586] * (1/0.6586)$$

$$P_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projektovane tačke:

$$A'' = (0.445, 2.15, 0)$$
$$B'' = (-0.823, 0, 0)$$
$$C'' = (0.620, 0, 0)$$
$$D'' = (1.814, 1.502, 0)$$
$$E'' = (0, 1.414, 0)$$

Zadatak 2

U desnom pravouglom koordinatnom sistemu posmatrani objekti se nalaze u prostoru definisanom kvadrom:

$$x \in [10, 50], y \in [10, 30], z \in [-50, 0]$$

Prostim sažimanjem dati prostor se preslikava na prostor definisan kockom:

$$x \in [10, 20], y \in [10, 20], z \in [-10, 0]$$

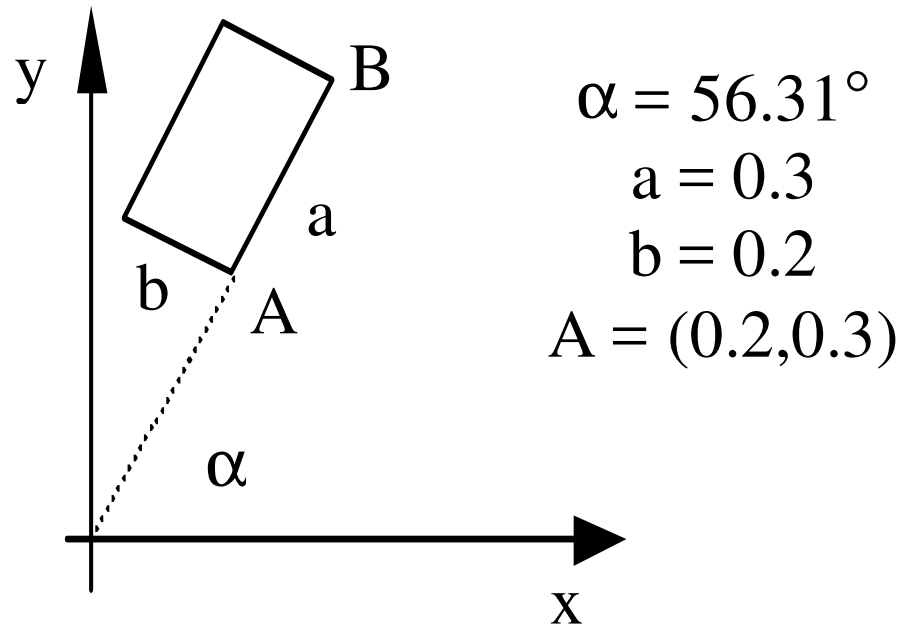
a zatim projektuje sa perspektivom na XoY ravan sa centrom projekcije u tački D(0,0,10).

Zadatak 2

Delove projekcije objekata koji se nalaze u prozoru prikazane ravni definisanom sa $x \in [5, 15]$, $y \in [5, 10]$, potrebno je preslikati u prikazni prozor, definisan sl. 1, uređaja sa normalizovanim koordinatama, tako da se stranica prozora $y=5$ preslika u stranicu prikaznog prozora AB, pri čemu se tačka prozora $(5,5)$ preslikava u tačku prikaznog prozora A.

Postaviti matričnu jednačinu preslikavanja tačke iz zadatog 3D prostora u dati prikazni prozor.

Zadatak 2



Napomena: potrebno je postaviti sve jednačine koje definišu preslikavanje originalne tačke (3D) u njenu sliku, i u sve matrice elementarnih transformacija uvrstiti konkretne vrednosti elemenata. Nije potrebno množiti matrice.

Zadatak 2 – rešenje

1. Translacija koordinatnog sistema u tačku $O_1(10,10,0)$;
2. Skaliranje faktorima $S_x=0.25$, $S_y=0.5$, $S_z=0.2$;
3. Inverzna translacija u tačku $O(-10,-10,0)$
4. Projekcija sa perspektivom iz centra $D(0,0,10)$
5. Translacija koordinatnog početka u $O_2(5,5)$
6. Skaliranje skala faktorima $S_x = 0.3/10$, $S_y=0.2/5$
7. Rotacija u smeru kazaljke na satu za ugao $\alpha = 56.31^\circ$
8. Translacija koordinatnog početka u tačku $O_3(-0.2, -0.3)$

Zadatak 3

Pokretna kamera rotira u smeru kretanja kazaljke časovnika oko X-ose desnog pravouglog koordinatnog sistema za ugao $\alpha=30^\circ$, zatim se pomeri u pravcu i smeru negativne X-ose za 5 jedinica dužine i konačno rotira u smeru suprotnom od smeru kretanja kazaljke na časovniku oko ose-Y za ugao $\beta=15^\circ$.

Zadatak 3

Smatrajući da je koordinatni sistem realnog sveta vezan za pokretnu kameru i da se ortogonalna projekcija originalne tačke $Q(x,y,z)$ nakon izvršenih transformacija nalazi u prozoru (*window*) definisanom u X-Y ravni pomoću tačke $A(-15,-5)$ u donjem levom uglu i tačke $B(15,5)$ u gornjem desnom uglu, vrši se preslikavanje date projekcije tačke iz koordinatnog sistema realnog sveta u prikazni prozor (*viewport*) definisan tačkama $A'(0.1,0.1)$, $B'(0.5, 0.25)$ datim u normalizovanim koordinatama uređaja.

Zadatak 3

Postavljanjem “ogledala” na pravu $x=0.6$, dobija se konačna slika u ogledalu Q' date tačke.

Postaviti (jednu) matričnu jednačinu koja definiše sliku Q' u funkciji originalne tačke Q .

Napomena: nije potrebno izračunavati kompozitnu matricu, već samo uvrstiti konkretne vrednosti elemenata u elementarne matrice.

Zadatak 3 – rešenje

$Q' = Q * \text{transformacije u 3D} * \text{ortogonalna projekcija} * \text{preslikavanje u prikazni prostor} * \text{ogledanje}$

$$Q' = Q * ((R_X * T_X * R_Y) * P_o * (T_W * S * T_{VP}) * (T_{X1} * O_Y * T_{X2}))$$

Zadatak 3 – rešenje

$$Q' = Q \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30^\circ & \sin 30^\circ & 0 \\ 0 & -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 15^\circ & 0 & \sin 15^\circ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 15^\circ & 0 & \cos 15^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 15 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{0.4}{30} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{0.15}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 4

Koristeći matrični račun i matrice elementarnih transformacija, odrediti matricu projekcije sa perspektivom na ravan $x=5$ za posmatrača koji se nalazi u tački $P(0,0,5)$.

Smatrati da se tačka $Q(x,y,z)$ koja se projektuje nalazi u desnom pravouglom koordinatnom sistemu.

Koristeći matricu projekcije iz tačke (a) izračunati koordinate projekcije tačke $Q(2.5, 5, 2.5)$.

Zadatak 4 – rešenje

Matrica projekcije se dobija na sledeći način:

$$T(5,0,5) * R_y(-\pi/2) * P_p(0,0,5) * R_y(\pi/2) * T(-5,0,-5) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadatak 4 – rešenje

$$[x_w \quad y_w \quad z_w \quad w] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Projekcija tačke $Q(x,y,z)$ je Q' :

$$Q' = \left[x' = \frac{x_w}{w} \quad \frac{y_w}{w} \quad \frac{z_w}{w} \quad 1 \right]$$

U slučaju $Q(2.5, 5, 2.5)$, dobija se:

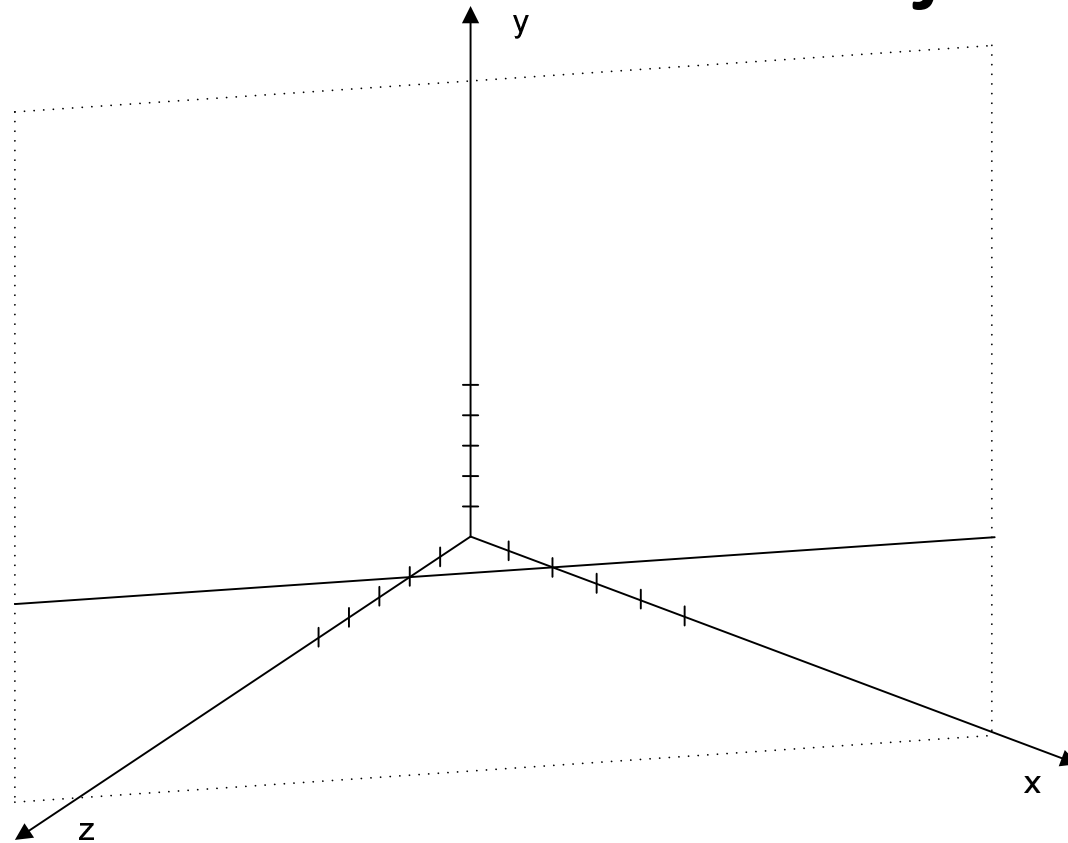
$$Q' = (5, 10, 0), w = 1/5$$

Zadatak 5

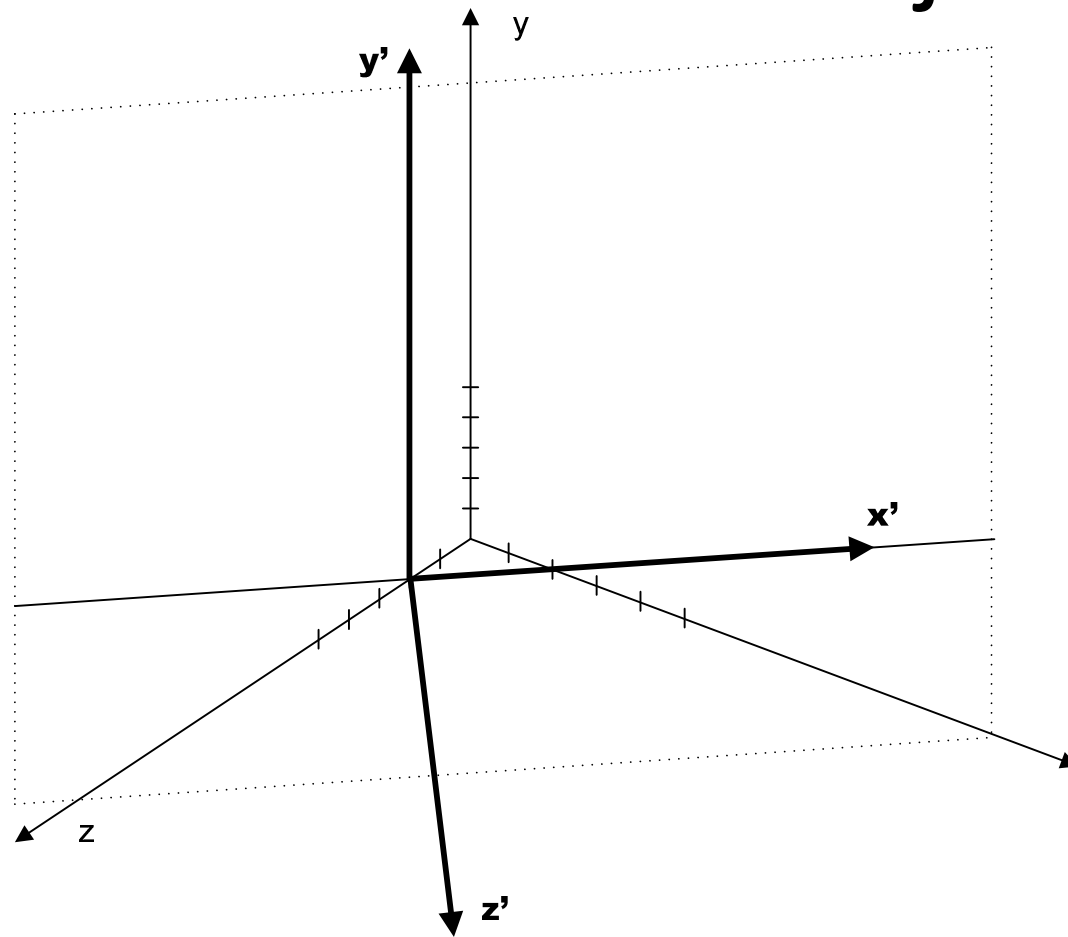
Postaviti matričnu jednačinu koja određuje projekciju sa perspektivom iz centra projekcije $P(0,0,6)$ na projekcionu ravan $y=5$, slike proizvoljne tačke (u desnom 3D koord. sistemu) u ogledalu postavljenom na ravan $z=-x+2$.

U sve matrice elementarnih transformacija koje učestvuju u matričnoj jednačini uvrstiti konkretne vrednosti elemenata, ali ne izračunavati kompozitnu matricu.

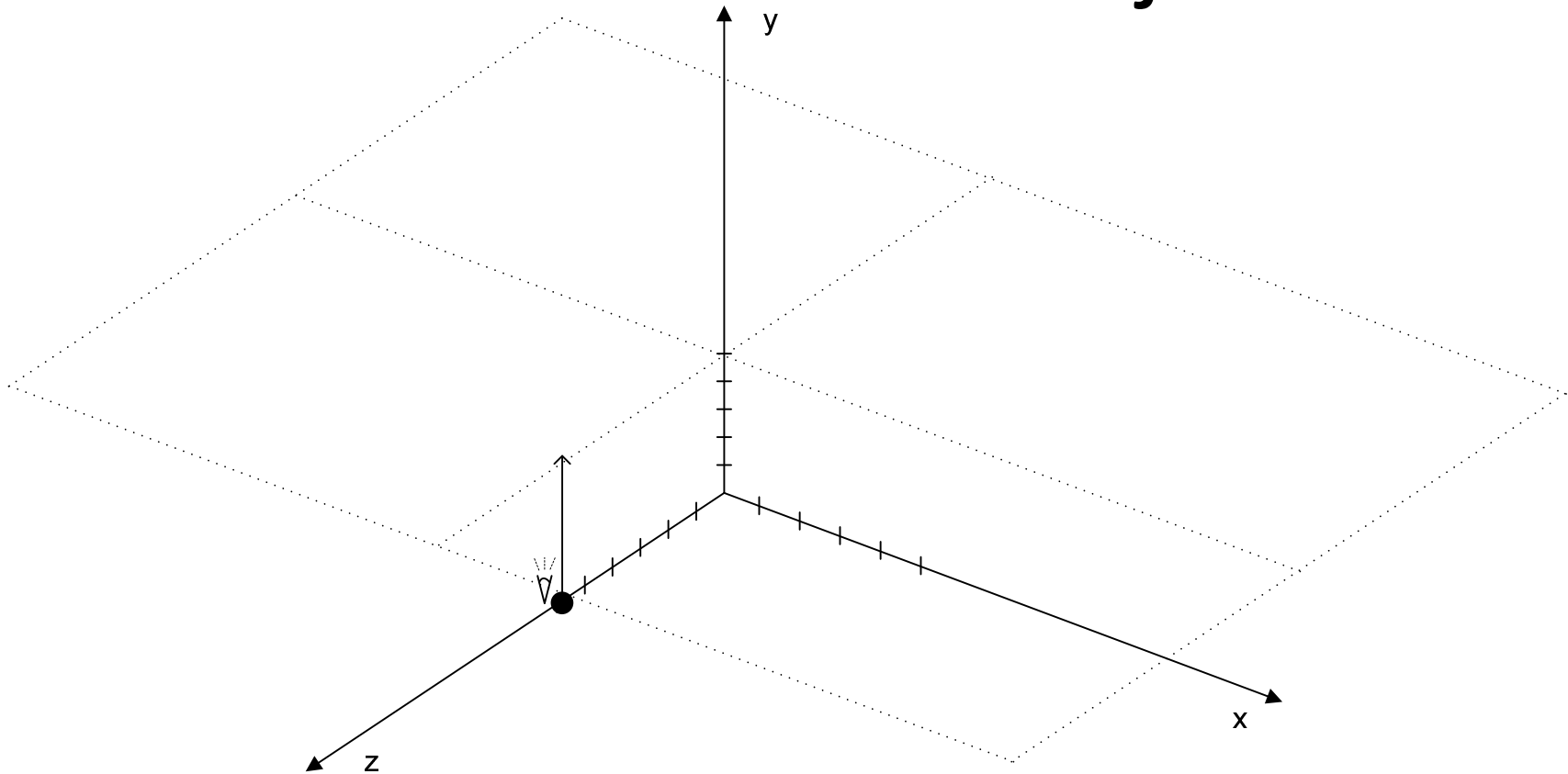
Zadatak 5 – rešenje



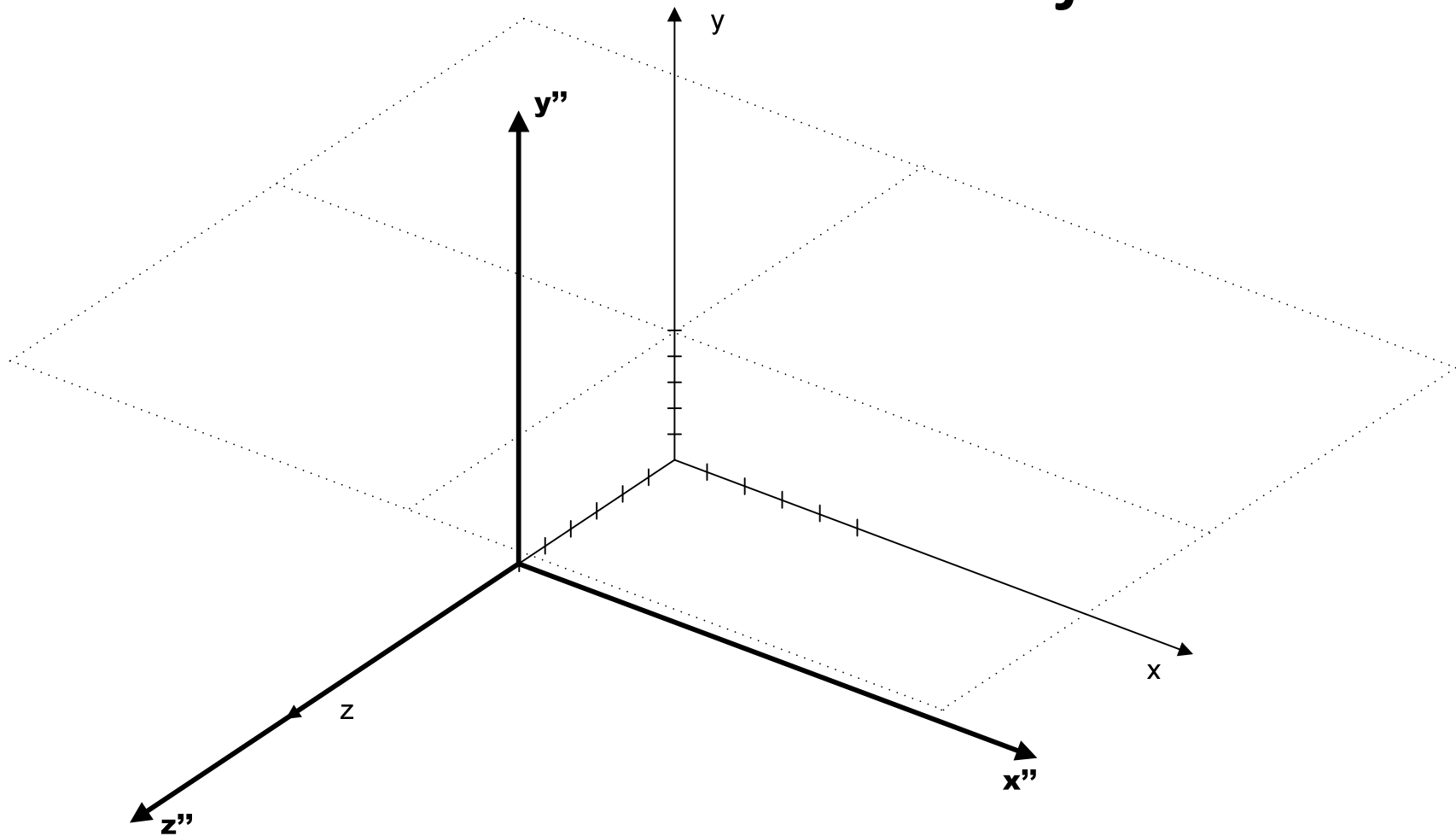
Zadatak 5 – rešenje



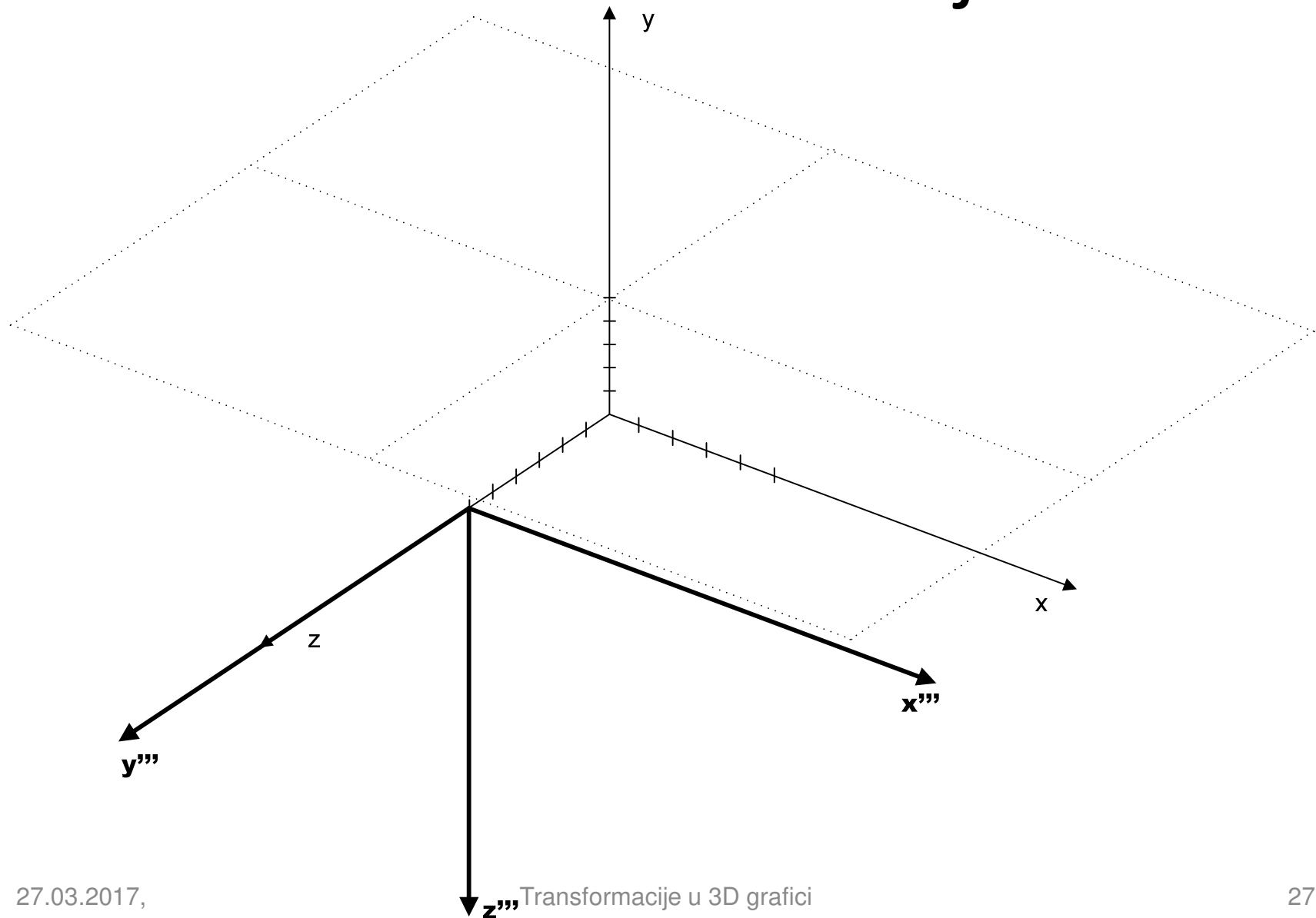
Zadatak 5 – rešenje



Zadatak 5 – rešenje



Zadatak 5 – rešenje



Zadatak 5 – rešenje

Matrica projekcije se dobija na sledeći način:

$$M = T(0,0,2) * R_y(\pi/4) * O_{xy} * R_y(-\pi/4) * T(0,0,-2) * T(0,0,6) * R_x(\pi/2) * T(0,0,-5) * P_p(0,0,5) * T(0,0,5) * R_x(-\pi/2) * T(0,0,-6)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

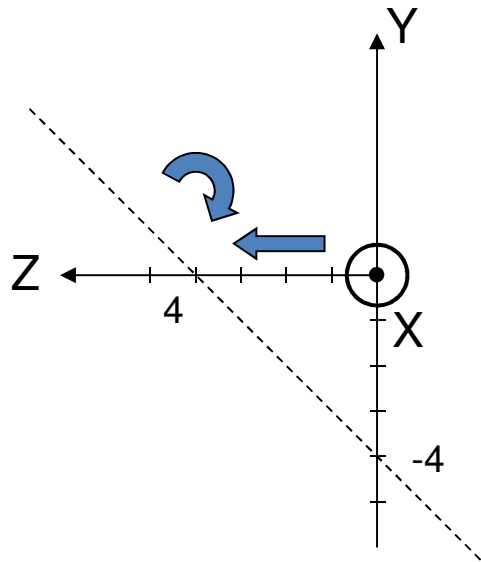
Zadatak 6 (K2 2007/2008)

Postaviti jednu matričnu jednačinu koja određuje projekciju sa perspektivom iz centra projekcije $P(0,0,3)$ na projekcionu ravan $z=5$, slike proizvoljne tačke (u desnom 3D koordinatnom sistemu) u ogledalu postavljenom na ravan $z=y+4$.

U sve matrice elementarnih transformacija koje učestvuju u matričnoj jednačini uvrstiti konkretne vrednosti.

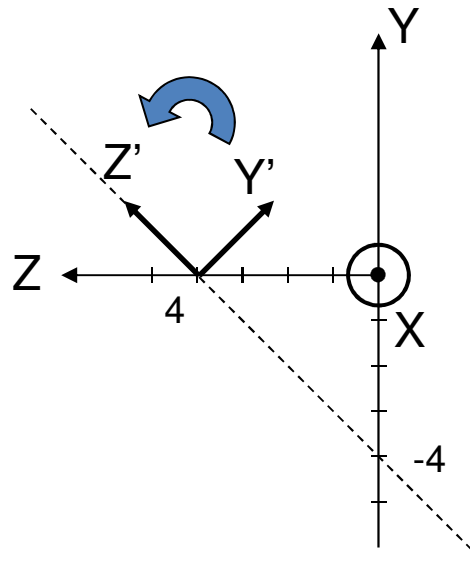
Nije potrebno množiti matrice.

Zadatak 6 – rešenje



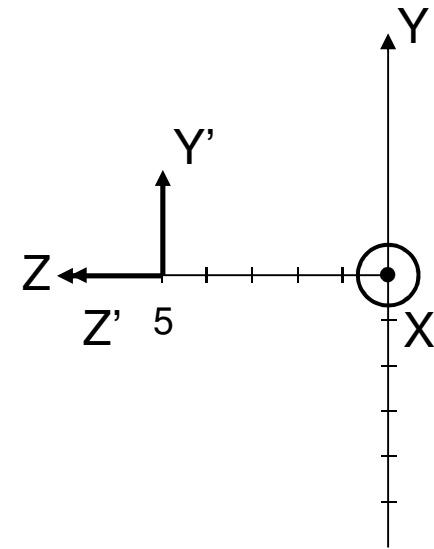
$$T1(0,0,4)$$

$$R1x(-\pi/4)$$



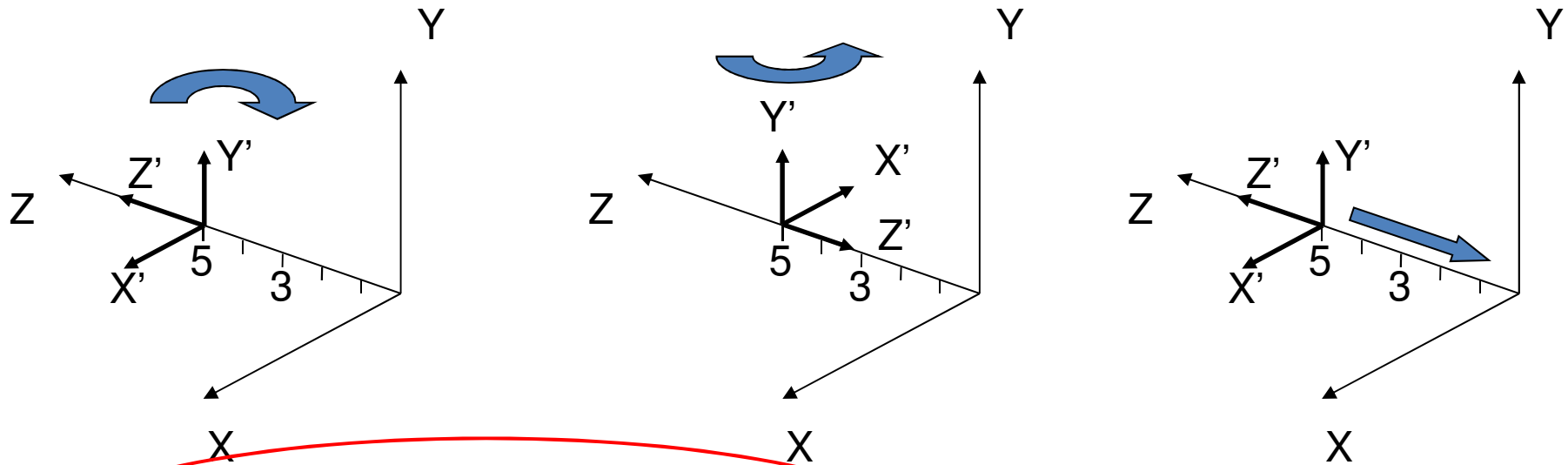
$$O_{Z'oX}=S(1,-1,1)$$

$$R2x(\pi/4)$$



$$T2(0,0,1)$$

Zadatak 6 – rešenje



$R1_Y(-\pi)$

$P_P(d=2)$

$T3(0,0,-5)$

$R2_Y(\pi)$

$$R1_Y(\pi) = R2_Y(-\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_P(d=2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 6 – rešenje

$$M = \text{Translacija1} * \text{Rotacija1} * \text{Ogledanje_zx} * \\ \text{Rotacija2} * \text{Translacija2} * \text{Projekcija} * \text{Translacija3}$$

$$\text{Translacija1} = T(0,0,4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rotacija1} = R1x(-\pi/4) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ogledanje_xz} = S(1, -1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 6 – rešenje

$$M = \text{Translacija1} * \text{Rotacija1} * \text{Ogledanje_zx} * \\ \text{Rotacija2} * \text{Translacija2} * \text{Projekcija} * \text{Translacija3}$$

$$\text{Rotacija2} = R_{2x}(\pi/4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Projekcija} = P_p(d=-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Translacija2} = T(0,0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Translacija3} = T(0,0,-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$