


Računarska grafika

Transformacije u 3D i
projekcije



Transformacije u 3D

- I ovde se pretpostavlja konvencija pokretne virtuelne kamere
- Postoji formalna sličnost sa transformacijama u 2D grafici:
 - dodaje se jedan član jednačina (za koordinatu z),
 - dodaje se jedna jednačina (za z')
 - posledica je da matrica transformacije postaje 4x4

$$x' = A1 \cdot x + B1 \cdot y + C1 \cdot z + D1 \cdot 1$$

$$y' = A2 \cdot x + B2 \cdot y + C2 \cdot z + D2 \cdot 1$$

$$z' = A3 \cdot x + B3 \cdot y + C3 \cdot z + D3 \cdot 1$$

$$1 = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 1 \cdot 1$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} A1 & A2 & A3 & 0 \\ B1 & B2 & B3 & 0 \\ C1 & C2 & C3 & 0 \\ D1 & D2 & D3 & 1 \end{bmatrix}$$

Translacija

- Koordinatni početak $O(0,0,0)$ se translatorno pomera u tačku $O'(x_1, y_1, z_1)$:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_1 & -y_1 & -z_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacije

- U 2D grafici
 - jedna elementarna rotacija (oko koordinatnog početka)
- U 3D grafici
 - 3 elementarne rotacije (oko svake ose koordinatnog sistema)
- Pozitivan smer rotacije oko ose koordinatnog sistema
 - određen pravilom desne zavojnice
- Matrice rotacije oko X ose (R_x) za ugao α ,
oko Y ose (R_y) za ugao β i oko Z ose (R_z) za ugao γ :

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Skaliranje

- Faktori skaliranja za ose X,Y,Z su S_x , S_y i S_z , respektivno
- Matrica skaliranja po sve tri ose:

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Složene transformacije

- Kao i kod transformacija u 2D grafici
 - složena transformacija se može dekomponovati na elementarne
 - određuje se kompozitna matrica složene transformacije množenjem matrica elementarnih transformacija
- Redosled elementarnih transformacija u složenoj transformaciji je bitan, množenje nije komutativno

Rotacija oko proizvoljne ose (1)

- Problem:
 - izvršiti rotaciju za ugao α oko ose koja spaja tačke $P1(x1,y1,z1)$ i $P2(x2,y2,z2)$.
- Rešenje:
 - translacija koordinatnog sistema u tačku $P1(x1,y1,z1)$.
 - rotacija sistema za ugao $-\theta$ (u smeru kazaljke) oko ose X tako da se data linija $P1P2$ dovede da leži u XoZ ravni

$$Dx = x2 - x1$$

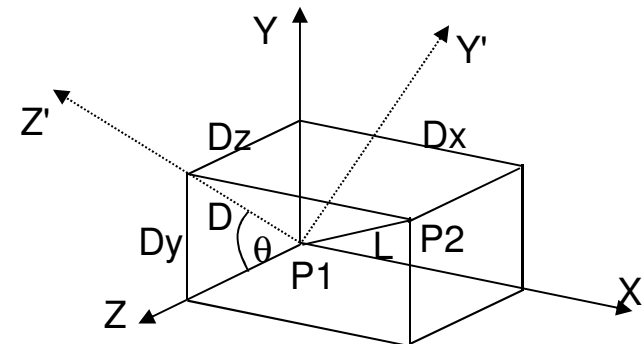
$$Dy = y2 - y1$$

$$Dz = z2 - z1$$

$$D = \sqrt{Dy^2 + Dz^2}$$

$$\sin \theta = Dy / D$$

$$\cos \theta = Dz / D$$

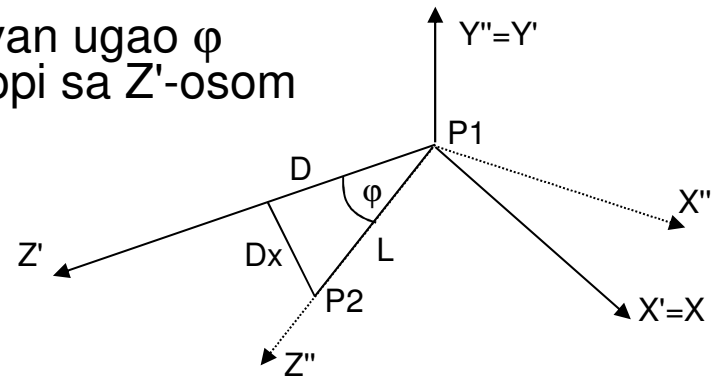


Rotacija oko proizvoljne ose (2)

- rotacija sistema oko Y' za pozitivan ugao φ tako da se data linija $P1P2$ poklopi sa Z' -osom

$$L = \sqrt{D^2 + Dx^2} = \sqrt{Dy^2 + Dz^2 + Dx^2}$$

$$\sin \varphi = Dx / L \quad \cos \varphi = D / L$$

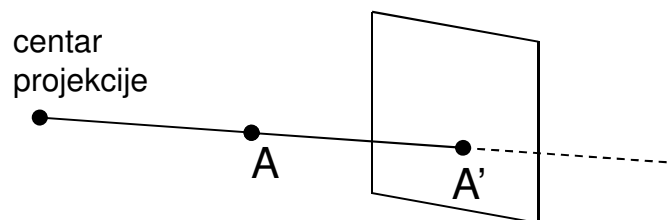


- rotacija sistema oko Z'' za ugao α .
- rotacija sistema oko Y za ugao $-\varphi$.
- rotacija sistema oko X za ugao θ .
- translacija u originalni koordinatni početak.
- Kompozitna matrica totalne transformacije:

$$R = T * R_x * R_y * R_z * R_y' * R_x' * T'$$
 (M' je matrica inverzne transformacije za M)

Projekcija

- Generalno, projekcija je transformacija koja preslikava tačku
 - iz koordinatnog sistema sa N dimenzija
 - u koordinatni sistem sa manje od N dimenzija
- Ograničenja (na kursu):
 - na preslikavanje 3D objekta na 2D površinu
 - na planarne geometrijske projekcije
- Planarna geometrijska projekcija 3D tačke se dobija tako što se:
 - prav *projekcioni zrak* (*projektor*) emituje se iz *centra projekcije*
 - projektor prolazi kroz željenu 3D tačku
 - odredi se presek projektora sa *projekcionom ravni*



Osnovne klase projekcija

- Povoljna okolnost je što je projekcija linije takođe linija, te se projektovanje svodi na krajnje tačke
- Dve osnovne klase planarnih geometrijskih projekcija su
 - *perspektivna* i
 - *paralelna*
- Kod perspektivne projekcije
 - centar projekcije i projekciona ravan su na konačnom rastojanju
- Kod paralelne projekcije
 - centar projekcije je beskonačno udaljen od projekcione ravni

Perspektivna projekcija

- Prirodan vizuelni efekat
 - kao kod fotografije i čovekovog vizuelnog sistema
- Efekat se naziva perspektivnim skraćanjem (*perspective foreshortening*):
 - veličina projekcije objekta se menja
inverzno sa rastojanjem objekta od centra projekcije
- Mane su što se na projekciji ne mogu meriti dužine i uglovi
 - uglovi su realni samo za stranice objekta
koje su paralelne sa projekcionom ravni
- Karakteristika perspektivne projekcije svakog skupa paralelnih linija (koje nisu paralelne projekcionoj ravni)
 - skup konvergira u zajedničku "iščezavajuću" (*vanishing*) tačku

Oсна iščezavajuća tačka

- *Oсна iščezavajuća tačka (AVP)*
 - tačka iščezavanja linija paralelnih osi koordinatnog sistema
- Broj osnih iščezavajućih tačaka je jednak broju osa koje preseca projekciona ravan
 - čest slučaj: centar projekcije na Z-osi a projekciona ravan XoY
 - postoji samo jedna AVP
- U arhitekturi i inženjeringu
 - projekcija sa 2 AVP se koristi često
 - projekcija sa 3 AVP se koristi ređe

Paralelna projekcija

- Projekcioni zraci (projektor) su paralelni
- Određen je samo pravac i smer projektor
 - vektor: *smer projekcije (direction of projection)*
- Generalno, vektor je razlika tačaka u homogenom sistemu:
$$v=(x,y,z,1) - (x',y',z',1) = (a, b, c, 0)$$
- Perspektivna projekcija sa centrom u beskonačnosti je paralelna projekcija
- Paralelna projekcija ima sledeće osobine:
 - na njoj se mogu meriti rastojanja
 - iako i ovde mogu biti različita (ali konstantna) skraćivanja po svakoj od osa
 - paralelne linije ostaju paralelne (ne postoje iščezavajuće tačke)
 - uglovi su očuvani samo na stranicama tela koje su paralelne projekcionoj ravni

Klasifikacija paralelnih projekcija

- Ortogonalne (ortografske)
 - smer projekcije normalan na projekcionu ravan
 - pogled odozgo (*top, plan view*), spreda (*front view*), sa strane (*side view*)
 - projekciona ravan je koordinatna ravan
 - aksonometrijske
 - koriste projekcionu ravan koja nije normalna na ose koord. sistema
 - izometrijske: normala na proj. ravan zaklapa jednake uglove sa sve 3 ose
- Iskošene (*oblique*)
 - smer projekcije nije normalan na projekcionu ravan
 - kavaljer
 - smer projekcije zaklapa ugao od 45° sa projekcionom ravni, bez skraćenja
 - kabinet
 - smer projekcije zaklapa ugao od $\arctg(2)=63.4^\circ$
 - linije normalne na projekcionu ravan se skraćuju faktorom 2

Matematičko modeliranje projekcija

- Projekciona ravan je XoY ravan
- Centar projekcije se nalazi na pozitivnoj Z osi i to:
 - ako je centar u tački $P(0,0,+\infty)$ projekcija je ortogonalna (paralelni zraci, normalni na ravan)
 - ako je centar u tački $P(0,0,d \neq +\infty)$ projekcija je sa perspektivom
- Ideja je da se i projekcija tretira kao elementarna transformacija, kako bi matematički aparat bio jednoobrazan

Ortogonalna projekcija

- Svodi se na ignorisanje z komponente tačke (projekciona ravan je $z'=0$):

$$x' = x$$

$$y' = y$$

$$z' = 0$$

$$x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot 1$$

$$y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot 1$$

$$z' = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot 1$$

$$1 = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 1 \cdot 1$$

$$P_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Slika tačke treba da bude izražena u 2D:

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_{2D} = P_{3D} * P_O$$

$$P_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projekcija sa perspektivom (1)

- Centar projekcije $V(0,0,d)$ leži na pozitivnoj Z osi

$$\frac{x'}{d} = \frac{x}{d+(-z)} \Rightarrow x' = x \cdot \frac{d}{d-z}$$

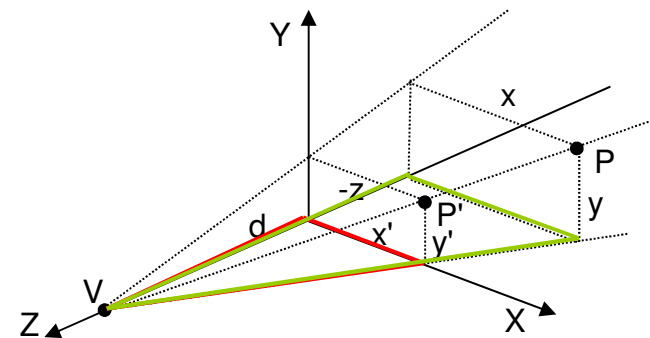
$$\frac{y'}{d} = \frac{y}{d+(-z)} \Rightarrow y' = y \cdot \frac{d}{d-z}$$

$$\left. \begin{array}{l} x' = \frac{d}{d-z} \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot 1 \\ y' = 0 \cdot x + \frac{d}{d-z} \cdot y + 0 \cdot 1 \\ 1 = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1 \end{array} \right\} \cdot \frac{d-z}{d} = w$$

$$x'' = x' \cdot \frac{d-z}{d} = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot 1$$

$$y'' = y' \cdot \frac{d-z}{d} = 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot 1$$

$$w = 1 \cdot \frac{d-z}{d} = 0 \cdot x + 0 \cdot y + \left(-\frac{1}{d}\right) \cdot z + 1 \cdot 1$$



Projekcija sa perspektivom (2)

- U matričnom obliku:
$$[x'' \quad y'' \quad w] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- Matrica projekcije sa perspektivom: $P_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Koordinate tačke projekcije se dobijaju:
$$[x' \quad y' \quad 1] = \begin{bmatrix} \frac{x''}{w} & \frac{y''}{w} & 1 \end{bmatrix}$$
- Napomena: za $d=0$ (centar projekcije u koordinatnom početku)
 - projekcija je nedefinisana

Primer

- Tačka P(3,5,7) se projektuje u tačku Q
- Centar projekcije je u tački V(0,0,10), a projekciona ravan je XoY

$$[3 \ 5 \ 7 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [3 \ 5 \ 0.3] \Rightarrow [3 \ 5 \ 0.3] / 0.3 = \left[10 \ \frac{50}{3} \ 1 \right] \Rightarrow Q\left(10, \frac{50}{3}\right)$$