

Колоквијум из Основа рачунарске технике - 2016/2017

(30.04.2017.)

Р е ш е њ е

Задатак 1

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3 + x_4) \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 + x_3 + \overline{x_4}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}) + (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4) + (x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 + \overline{x_4})$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}) + (\overline{x_1} \cdot ((\overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}) + (x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4))) + (x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 + \overline{x_4})$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_4}$$

$$f(1) = \{X000,0010,0101,111X,11X0\}$$

$$f(1) = \{0000,1000,0010,0101,1110,1111,1100,1110\}$$

$$f(1) = \{0,8,2,5,14,15,12\} = \{0,2,5,8,12,14,15\}$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + \overline{x_3} + x_2 + x_4 + x_3 + \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_4} \cdot (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4 + \overline{x_3} \cdot \overline{x_4})$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1 + \overline{x_3} + x_2 + x_4) \cdot (x_3 + \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_4})) \cdot ((\overline{x_1} + x_2) + (x_3 \cdot x_4) + \overline{x_3} \cdot \overline{x_4})$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1 + \overline{x_3} + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_4})) \cdot (x_3 + (\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (x_1 + x_4))) \cdot ((\overline{x_1} + x_2) + x_3 \cdot x_4 + \overline{x_3} \cdot \overline{x_4})$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1 + \overline{x_3} + \overline{x_2}) \cdot (x_1 + \overline{x_3} + \overline{x_4})) \cdot ((x_3 + \overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (x_3 + x_1 + x_4)) \cdot ((\overline{x_1} + x_2) + (x_3 + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_3} + x_4))$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + \overline{x_3} + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3) \cdot (x_1 + x_3 + x_4) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + x_3 + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3} + x_4)$$

$$g(0) = \{011X,0X11,110X,0X00,1001,1010\}$$

$$g(0) = \{0110,0111,0011,0111,1100,1101,0000,0100,1001,1010\}$$

$$g(0) = \{6,7,3,12,13,0,4,9,10\} = \{0,3,4,6,7,9,10,12,13\}$$

i	f(x ₁ , x ₂ , x ₃ , x ₄)	g(x ₁ , x ₂ , x ₃ , x ₄)
0	b	b
1	b	b
2	1	1
3	0	0
4	0	0
5	1	1
6	0	0
7	0	0

i	f(x ₁ , x ₂ , x ₃ , x ₄)	g(x ₁ , x ₂ , x ₃ , x ₄)
8	1	1
9	0	0
10	0	0
11	0	1
12	b	b
13	0	0
14	1	1
15	1	1

Задатак 2

Помоћу Карноових карти наћи минималну:

$$a) f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_2} + \overline{x_1} + x_3 + \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} + x_1 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_4 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_3 \cdot x_4$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_2} + \overline{x_1} + x_3 + \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} + x_1 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_4 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_3 \cdot x_4$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \cdot (\overline{x_1} + x_3 + \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_3}) + (\overline{x_1} + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_4) \cdot (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_3 \cdot x_4)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \cdot (x_1 \cdot (x_3 + \overline{x_4}) + \overline{x_1} \cdot \overline{x_3}) + (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_4) \cdot ((\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_3) + \overline{x_4})$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \cdot (x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_3}) + (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_4) \cdot (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_4})$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}) + (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_4 \cdot \overline{x_4})$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$$

$$f(1) = \{111X, 11X0, 010X, 010X\}$$

$$f(1) = \{1110, 1111, 1100, 1110, 0100, 0101, 0100, 0101\}$$

$$f(1) = \{14, 15, 12, 4, 5\} = \{4, 5, 12, 14, 15\}$$

$x_1 x_2$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}$$

6)

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_2 \cdot x_4 + \bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3$$

$$f(1) = \{x0x1, 0x11, x11x\}$$

$$f(1) = \{0001, 0011, 1001, 1011, 0011, 0111, 0110, 0111, 1110, 1111\}$$

$$f(1) = \{1, 3, 9, 11, 3, 7, 6, 7, 14, 15\}$$

$$f(1) = \{1, 3, 6, 7, 9, 11, 14, 15\}$$

$$f(0) = \{0, 2, 4, 5, 8, 10, 12, 13\}$$

	x_1x_2			
	0	0	1	1
x_3x_4	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	1	0

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_4) \cdot (\bar{x}_2 + x_3)$$

B)

$$f(0) = \{2, 3, 7, 11\}$$

$$f(b) = \{4, 8, 9, 13, 14\}$$

$$f(1) = \{0, 1, 5, 6, 10, 11, 15\}$$

	x_1x_2			
	0	0	1	1
x_3x_4	0	b	1	b
0	1	b	1	b
0	1	1	b	b
1	0	0	1	0
1	0	1	b	1

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \bar{x}_4 + x_2 \cdot \bar{x}_4$$

Задатак 3

Комбинациона мрежа коју треба реализовати има четири улазна сигнала (x_3, x_2, x_1, x_0) и четири излазна сигнала (z_3, z_2, z_1, z_0). Улазни сигнали представљају информацију на коју писту авион треба да приступи (x_3) и у ком смеру би авион желео да лети (x_2, x_1, x_0). На основу слике аеродрома, потребно је пронаћи најмањи угао који се заклапа на основу смера узлетања и жељеног смера путовања.

Прво ћемо да формирамо комбинациону таблицу (улазни вектор је x_3, x_2, x_1, x_0 , док је излазни z_3, z_2, z_1, z_0), у колони Коментар се види путовање кроз градове :

Писта	Смер	x_3	x_2	x_1	x_0	z_3	z_2	z_1	z_0	Коментар
P ₀₁	N	0	0	0	0	0	0	1	0	Полетање са z_0 , угао $\rightarrow 113^\circ$; Полетање са z_1 , угао $\rightarrow 67^\circ$
	NE	0	0	0	1	0	0	1	0	Полетање са z_0 , угао $\rightarrow 158^\circ$; Полетање са z_1 , угао $\rightarrow 22^\circ$
	E	0	0	1	0	0	0	1	0	Полетање са z_0 , угао $\rightarrow 157^\circ$; Полетање са z_1 , угао $\rightarrow 23^\circ$
	SE	0	0	1	1	0	0	1	0	Полетање са z_0 , угао $\rightarrow 112^\circ$; Полетање са z_1 , угао $\rightarrow 68^\circ$
	S	0	1	0	0	0	0	0	1	Полетање са z_0 , угао $\rightarrow 67^\circ$; Полетање са z_1 , угао $\rightarrow 113^\circ$
	SW	0	1	0	1	0	0	0	1	Полетање са z_0 , угао $\rightarrow 22^\circ$; Полетање са z_1 , угао $\rightarrow 158^\circ$
	W	0	1	1	0	0	0	0	1	Полетање са z_0 , угао $\rightarrow 23^\circ$; Полетање са z_1 , угао $\rightarrow 157^\circ$
	NW	0	1	1	1	0	0	0	1	Полетање са z_0 , угао $\rightarrow 68^\circ$; Полетање са z_1 , угао $\rightarrow 112^\circ$
P ₂₃	N	1	0	0	0	0	1	0	0	Полетање са z_2 , угао $\rightarrow 24^\circ$; Полетање са z_3 , угао $\rightarrow 156^\circ$
	NE	1	0	0	1	0	1	0	0	Полетање са z_2 , угао $\rightarrow 21^\circ$; Полетање са z_3 , угао $\rightarrow 159^\circ$
	E	1	0	1	0	0	1	0	0	Полетање са z_2 , угао $\rightarrow 66^\circ$; Полетање са z_3 , угао $\rightarrow 114^\circ$
	SE	1	0	1	1	1	0	0	0	Полетање са z_2 , угао $\rightarrow 111^\circ$; Полетање са z_3 , угао $\rightarrow 69^\circ$
	S	1	1	0	0	1	0	0	0	Полетање са z_2 , угао $\rightarrow 156^\circ$; Полетање са z_3 , угао $\rightarrow 24^\circ$
	SW	1	1	0	1	1	0	0	0	Полетање са z_2 , угао $\rightarrow 159^\circ$; Полетање са z_3 , угао $\rightarrow 21^\circ$
	W	1	1	1	0	1	0	0	0	Полетање са z_2 , угао $\rightarrow 114^\circ$; Полетање са z_3 , угао $\rightarrow 66^\circ$
	NW	1	1	1	1	0	1	0	0	Полетање са z_2 , угао $\rightarrow 69^\circ$; Полетање са z_3 , угао $\rightarrow 111^\circ$

Сада можемо формирати Карноове карте за сваки излаз ове комбинационе мреже.

Коришћењем добијених минималних КНФ и ДНФ (и њиховим факторисањем) за излазне сигнале, добијамо тражене минималне шеме (реализујемо шему на основу израза који има најмање логичких операција \Rightarrow најмање коришћење И, ИЛИ и НЕ елемената; ако два израза имају исти број логичких елемената, реализујемо онај који ће трансформацијом имати мањи број НИЛИ елемената – гледати смењивање операције AND и OR).

Излазни сигнал Z_3 :

x_3x_2	x_1x_0	00	01	11	10
00	0	0	0	1	0
01	1	0	0	1	0
11	3	0	0	0	1
10	2	0	0	1	0

ДНФ:

$$Z_3 = x_3x_2\bar{x}_1 + x_3x_2\bar{x}_0 + x_3\bar{x}_2x_1x_0 \xrightarrow{\text{факторисање}} Z_3 = x_3(x_2(\bar{x}_1 + \bar{x}_0) + \bar{x}_2x_1x_0)$$

Број логичких елемената * (И, ИЛИ и НЕ): **6**

* Дозвољене комплементарне вредности улаза

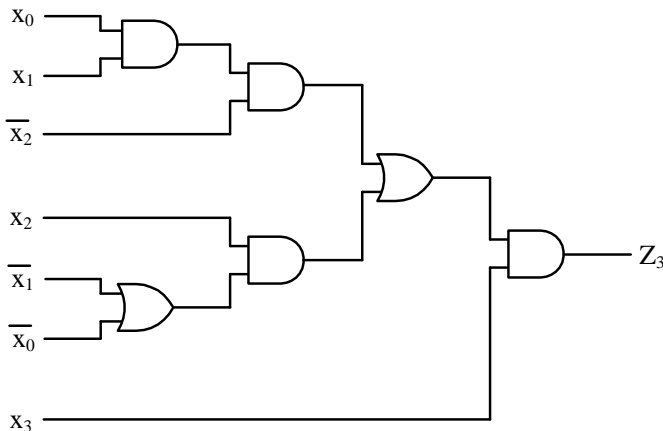
x_3x_2	x_1x_0	00	01	11	10
00	0	0	0	1	0
01	1	0	0	1	0
11	3	0	0	0	1
10	2	0	0	1	0

КНФ:

$$Z_3 = x_3(x_2 + x_1)(x_2 + x_0)(\bar{x}_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_0) \xrightarrow{\text{факторисање}} Z_3 = x_3(x_2 + x_1x_0)(\bar{x}_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_0)$$

Број логичких елемената * (И, ИЛИ и НЕ): **6**

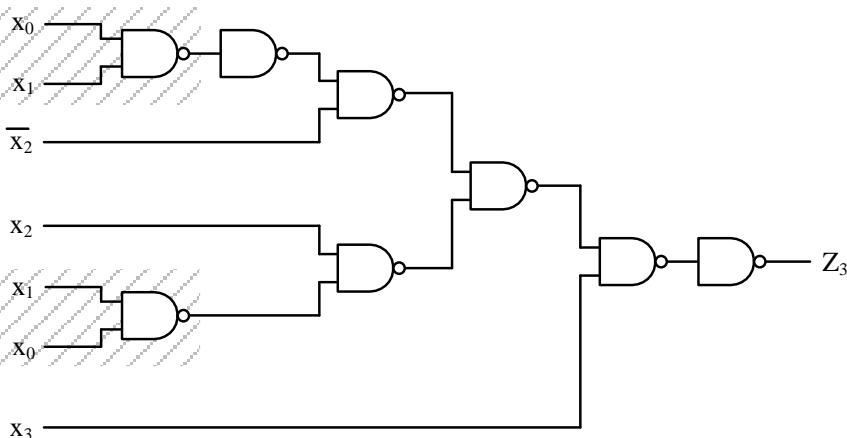
* Дозвољене комплементарне вредности улаза



Дискусија:

Потребно је обратити пажњу како се групишу сигнали у двоулазна кола, јер као последицу одабира можемо да смањимо шему са НИ колима.

На слици је шрафиран део шеме који се понавља. Довољно је реализовати једно коло, а затим га искористи у другом делу шеме.



Излазни сигнал Z_2 :

	X_3X_2			
X_1X_0	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0	0	1
11	0	0	1	0
10	0	0	0	1

ДНФ:

$$Z_2 = \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1} + \overline{x_3} \overline{x_2} x_0 + \overline{x_3} x_2 x_1 x_0 \xrightarrow{\text{факторисање}} Z_3 = x_3 (\overline{x_2} (\overline{x_1} + \overline{x_0}) + x_2 x_1 x_0)$$

Број логичких елемената * (И, ИЛИ и НЕ): **6**

* Дозвољене комплементарне вредности улаза

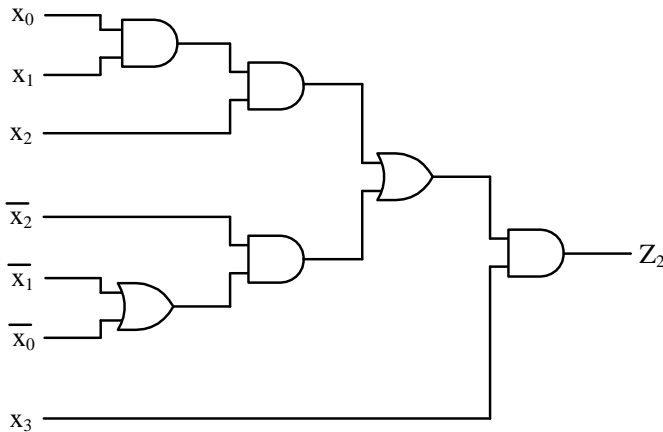
	X_3X_2			
X_1X_0	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0	0	1
11	0	0	1	0
10	0	0	0	1

КНФ:

$$Z_3 = x_3 (\overline{x_2} + x_1) (\overline{x_2} + x_0) (x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0}) \xrightarrow{\text{факторисање}} Z_3 = x_3 (\overline{x_2} + x_1 x_0) (x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0})$$

Број логичких елемената * (И, ИЛИ и НЕ): **6**

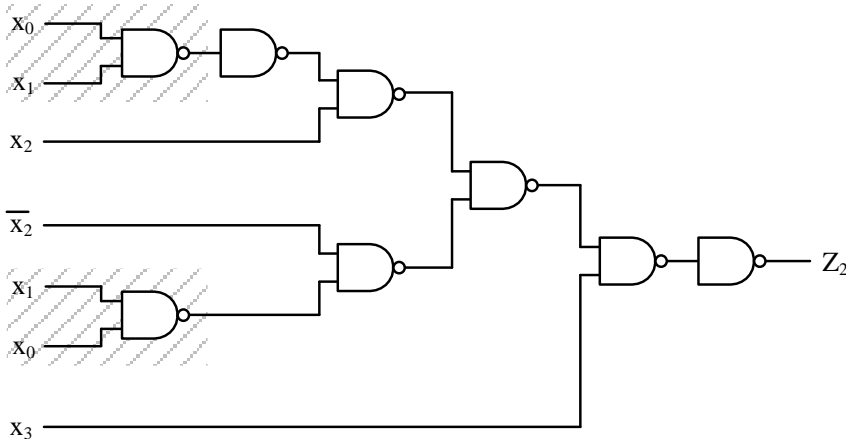
* Дозвољене комплементарне вредности улаза



Дискусија:

Потребно је обратити пажњу како се групишу сигнали у двоулазна кола, јер као последицу одабира можемо да смањимо шему са НИ колима.

На слици је шрафиран део шеме који се понавља. Довољно је реализовати једно коло, а затим га искористи у другом делу шеме.



Ислазни сигнал Z_1 :

		x_3x_2			
		00	01	11	10
x_1x_0	00	1 0	0 4	0 12	0 8
	01	1 1	0 5	0 13	0 9
	11	1 3	0 7	0 15	0 11
	10	1 2	0 6	0 14	0 10

ДНФ:

$$Z_1 = \overline{x_3} \cdot \overline{x_2}$$

Број логичких елемената * (И, ИЛИ и НЕ): 2

* Дозвољене комплементарне вредности улаза

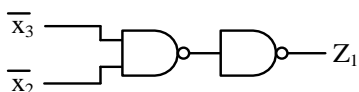
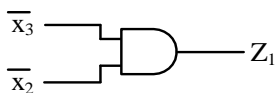
		x_3x_2			
		00	01	11	10
x_1x_0	00	1 0	0 4	0 12	0 8
	01	1 1	0 5	0 13	0 9
	11	1 3	0 7	0 15	0 11
	10	1 2	0 6	0 14	0 10

КНФ:

$$Z_1 = \overline{x_3} \cdot \overline{x_2}$$

Број логичких елемената * (И, ИЛИ и НЕ): 2

* Дозвољене комплементарне вредности улаза



Ислазни сигнал Z_0 :

x_3x_2 x_1x_0	00	01	11	10
00	0 ₀	1 ₄	0 ₁₂	0 ₈
01	0 ₁	1 ₅	0 ₁₃	0 ₉
11	0 ₃	1 ₇	0 ₁₅	0 ₁₁
10	0 ₂	1 ₆	0 ₁₄	0 ₁₀

ДНФ:

$$Z_0 = \overline{x_3}x_2$$

Број логичких елемената * (И, ИЛИ и НЕ): **1**

* Дозвољене комплементарне вредности улаза

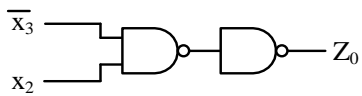
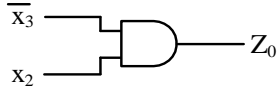
x_3x_2 x_1x_0	00	01	11	10
00	0 ₀	1 ₄	0 ₁₂	0 ₈
01	0 ₁	1 ₅	0 ₁₃	0 ₉
11	0 ₃	1 ₇	0 ₁₅	0 ₁₁
10	0 ₂	1 ₆	0 ₁₄	0 ₁₀

КНФ:

$$Z_0 = \overline{x_3}x_2$$

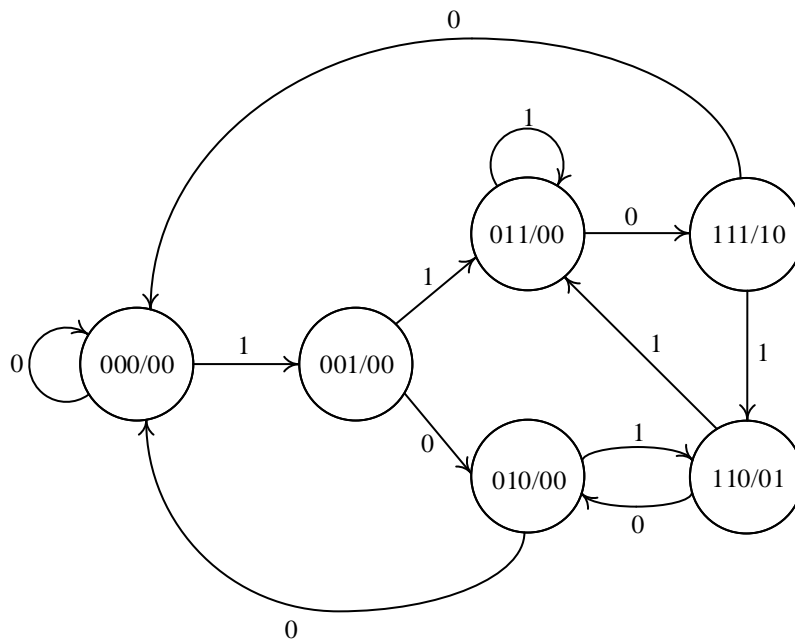
Број логичких елемената * (И, ИЛИ и НЕ): **1**

* Дозвољене комплементарне вредности улаза



Задатак 4

- Граф прелаза/излаза:



- Таблица прелаза/излаза:

Q \ X	0	1	Z
000	000	001	00
001	010	011	00
010	000	110	00
011	111	011	00
100	bbb	bbb	bb
101	bbb	bbb	bb
110	010	011	01
111	000	110	10

- Таблица прелаза/побуда:

X	Q	Q(t+1)	T ₁	T ₂	T ₃
0	000	000	0	0	0
0	001	010	0	1	1
0	010	000	0	1	0
0	011	111	1	0	0
0	100	bbb	b	b	b
0	101	bbb	b	b	b
0	110	010	1	0	0
0	111	000	1	1	1
1	000	001	0	0	1
1	001	011	0	1	0
1	010	110	1	0	0
1	011	011	0	0	0
1	100	bbb	b	b	b
1	101	bbb	b	b	b
1	110	011	1	0	1
1	111	110	0	0	1

- Карноове карте:

		xQ_1			
		0	0	1	1
Q_2Q_3	0	0	b	b	0
	0	0	b	b	0
	1	1	1	0	0
	1	0	1	1	1

$$T_1 = \bar{x}Q_1 + \bar{x}Q_2Q_3 + xQ_2\bar{Q}_3$$

		xQ_1			
		0	0	1	1
Q_2Q_3	0	0	b	b	0
	0	1	b	b	1
	1	0	1	0	0
	1	1	0	0	0

$$T_2 = \bar{Q}_2Q_3 + \bar{x}Q_1Q_3 + \bar{x}\bar{Q}_1Q_2\bar{Q}_3$$

		xQ_1			
		0	0	1	1
Q_2Q_3	0	0	b	b	1
	0	1	b	b	0
	1	0	1	1	0
	1	0	0	1	0

$$T_3 = xQ_1 + Q_1Q_4 + \bar{x}\bar{Q}_2Q_3 + x\bar{Q}_2\bar{Q}_3$$

		Q_1Q_2			
		00	01	11	10
Q_3	0	0	0	0	b
	1	0	0	1	b

$$Z_1 = Q_1Q_3$$

		Q_1Q_2			
		00	01	11	10
Q_3	0	0	0	1	b
	1	0	0	0	b

$$Z_2 = Q_1\bar{Q}_3$$

- Структурна шема:

