

**I колоквијум из Основа рачунарске технике - 2016/2017**

(30.04.2017.)

**Р е ш е њ е**

**Задатак 1**

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3 + x_4) \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 + x_3 + \overline{x_4}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}) + (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4) + (x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 + \overline{x_4})$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}) + (\overline{x_1} \cdot ((\overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}) + (x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4))) + (x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 + \overline{x_4})$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_4}$$

$$f(1) = \{X000,0010,0101,111X,11X0\}$$

$$f(1) = \{0000,1000,0010,0101,1110,1111,1100,1110\}$$

$$f(1) = \{0,8,2,5,14,15,12\} = \{0,2,5,8,12,14,15\}$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + \overline{x_3} + x_2 + x_4 + x_3 + \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_4} \cdot (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4 + \overline{x_3} \cdot \overline{x_4})$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1 + \overline{x_3} + x_2 + x_4) \cdot (x_3 + \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_4})) \cdot ((\overline{x_1} + x_2) + (x_3 \cdot x_4) + \overline{x_3} \cdot \overline{x_4})$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1 + \overline{x_3} + (\overline{x_2} \cdot \overline{x_4})) \cdot (x_3 + (\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (x_1 + x_4))) \cdot ((\overline{x_1} + x_2) + x_3 \cdot x_4 + \overline{x_3} \cdot \overline{x_4})$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1 + \overline{x_3} + \overline{x_2}) \cdot (x_1 + \overline{x_3} + \overline{x_4})) \cdot ((x_3 + \overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (x_3 + x_1 + x_4)) \cdot ((\overline{x_1} + x_2) + (x_3 + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_3} + x_4))$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + \overline{x_3} + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3) \cdot (x_1 + x_3 + x_4) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + x_3 + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3} + x_4)$$

$$g(0) = \{011X,0X11,110X,0X00,1001,1010\}$$

$$g(0) = \{0110,0111,0011,0111,1100,1101,0000,0100,1001,1010\}$$

$$g(0) = \{6,7,3,12,13,0,4,9,10\} = \{0,3,4,6,7,9,10,12,13\}$$

i	f(x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> , x <sub>4</sub> )	g(x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> , x <sub>4</sub> )
0	b	b
1	b	b
2	1	1
3	0	0
4	0	0
5	1	1
6	0	0
7	0	0

i	f(x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> , x <sub>4</sub> )	g(x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> , x <sub>3</sub> , x <sub>4</sub> )
8	1	1
9	0	0
10	0	0
<b>11</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
12	b	b
13	0	0
14	1	1
15	1	1

## Задатак 2

Помоћу Карноових карти наћи минималну:

$$a) f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_2} + \overline{x_1} + x_3 + \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} + x_1 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_4 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_3 \cdot x_4$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_2} + \overline{x_1} + x_3 + \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} + x_1 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_4 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_3 \cdot x_4$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \cdot (\overline{x_1} + x_3 + \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_3}) + (\overline{x_1} + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_4) \cdot (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_3 \cdot x_4)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \cdot (x_1 \cdot (x_3 + \overline{x_4}) + \overline{x_1} \cdot \overline{x_3}) + (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_4) \cdot ((\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_3) + \overline{x_4})$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \cdot (x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_3}) + (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_4) \cdot (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_4})$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}) + (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_4 \cdot \overline{x_4})$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$$

$$f(1) = \{111X, 11X0, 010X, 010X\}$$

$$f(1) = \{1110, 1111, 1100, 1110, 0100, 0101, 0100, 0101\}$$

$$f(1) = \{14, 15, 12, 4, 5\} = \{4, 5, 12, 14, 15\}$$

$x_1x_2$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}$$

6)

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_2 \cdot x_4 + \bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3$$

$$f(1) = \{x_0x_1, 0x_11, x_11x\}$$

$$f(1) = \{0001, 0011, 1001, 1011, 0011, 0111, 0110, 0111, 1110, 1111\}$$

$$f(1) = \{1, 3, 9, 11, 3, 7, 6, 7, 14, 15\}$$

$$f(1) = \{1, 3, 6, 7, 9, 11, 14, 15\}$$

$$f(0) = \{0, 2, 4, 5, 8, 10, 12, 13\}$$

	$x_1x_2$			
	0	0	1	1
$x_3x_4$	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	1	0

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_4) \cdot (\bar{x}_2 + x_3)$$

B)

$$f(0) = \{2, 3, 7, 11\}$$

$$f(b) = \{4, 8, 9, 13, 14\}$$

$$f(1) = \{0, 1, 5, 6, 10, 11, 15\}$$

	$x_1x_2$			
	0	0	1	1
$x_3x_4$	0	b	1	b
0	1	b	1	b
0	1	1	b	b
1	0	0	1	0
1	0	1	b	1

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \bar{x}_4 + x_2 \cdot \bar{x}_4$$

### Задатак 3

Комбинациона мрежа коју треба реализовати има четири улазна сигнала ( $x_3, x_2, x_1, x_0$ ) и четири излазна сигнала ( $z_3, z_2, z_1, z_0$ ). Улазни сигнали представљају информацију на коју писту авион треба да приступи ( $x_3$ ) и у ком смеру би авион желео да лети ( $x_2, x_1, x_0$ ). На основу слике аеродрома, потребно је пронаћи најмањи угао који се заклапа на основу смера узлетања и жељеног смера путовања.

Прво ћемо да формирамо комбинациону таблицу (улазни вектор је  $x_3, x_2, x_1, x_0$ , док је излазни  $z_3, z_2, z_1, z_0$ ), у колони Коментар се види путовање кроз градове :

Писта	Смер	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_0$	$z_3$	$z_2$	$z_1$	$z_0$	Коментар
P <sub>01</sub>	N	0	0	0	0	0	0	1	0	Полетање са $z_0$ , угао $\rightarrow 113^\circ$ ; Полетање са $z_1$ , угао $\rightarrow 67^\circ$
	NE	0	0	0	1	0	0	1	0	Полетање са $z_0$ , угао $\rightarrow 158^\circ$ ; Полетање са $z_1$ , угао $\rightarrow 22^\circ$
	E	0	0	1	0	0	0	1	0	Полетање са $z_0$ , угао $\rightarrow 157^\circ$ ; Полетање са $z_1$ , угао $\rightarrow 23^\circ$
	SE	0	0	1	1	0	0	1	0	Полетање са $z_0$ , угао $\rightarrow 112^\circ$ ; Полетање са $z_1$ , угао $\rightarrow 68^\circ$
	S	0	1	0	0	0	0	0	1	Полетање са $z_0$ , угао $\rightarrow 67^\circ$ ; Полетање са $z_1$ , угао $\rightarrow 113^\circ$
	SW	0	1	0	1	0	0	0	1	Полетање са $z_0$ , угао $\rightarrow 22^\circ$ ; Полетање са $z_1$ , угао $\rightarrow 158^\circ$
	W	0	1	1	0	0	0	0	1	Полетање са $z_0$ , угао $\rightarrow 23^\circ$ ; Полетање са $z_1$ , угао $\rightarrow 157^\circ$
	NW	0	1	1	1	0	0	0	1	Полетање са $z_0$ , угао $\rightarrow 68^\circ$ ; Полетање са $z_1$ , угао $\rightarrow 112^\circ$
P <sub>23</sub>	N	1	0	0	0	0	1	0	0	Полетање са $z_2$ , угао $\rightarrow 24^\circ$ ; Полетање са $z_3$ , угао $\rightarrow 156^\circ$
	NE	1	0	0	1	0	1	0	0	Полетање са $z_2$ , угао $\rightarrow 21^\circ$ ; Полетање са $z_3$ , угао $\rightarrow 159^\circ$
	E	1	0	1	0	0	1	0	0	Полетање са $z_2$ , угао $\rightarrow 66^\circ$ ; Полетање са $z_3$ , угао $\rightarrow 114^\circ$
	SE	1	0	1	1	1	0	0	0	Полетање са $z_2$ , угао $\rightarrow 111^\circ$ ; Полетање са $z_3$ , угао $\rightarrow 69^\circ$
	S	1	1	0	0	1	0	0	0	Полетање са $z_2$ , угао $\rightarrow 156^\circ$ ; Полетање са $z_3$ , угао $\rightarrow 24^\circ$
	SW	1	1	0	1	1	0	0	0	Полетање са $z_2$ , угао $\rightarrow 159^\circ$ ; Полетање са $z_3$ , угао $\rightarrow 21^\circ$
	W	1	1	1	0	1	0	0	0	Полетање са $z_2$ , угао $\rightarrow 114^\circ$ ; Полетање са $z_3$ , угао $\rightarrow 66^\circ$
	NW	1	1	1	1	0	1	0	0	Полетање са $z_2$ , угао $\rightarrow 69^\circ$ ; Полетање са $z_3$ , угао $\rightarrow 111^\circ$

Сада можемо формирати Карноове карте за сваки излаз ове комбинационе мреже.

Коришћењем добијених минималних КНФ и ДНФ (и њиховим факторисањем) за излазне сигнале, добијамо тражене минималне шеме (реализујемо шему на основу израза који има најмање логичких операција  $\Rightarrow$  најмање коришћење И, ИЛИ и НЕ елемената; ако два израза имају исти број логичких елемената, реализујемо онај који ће трансформацијом имати мањи број НИЛИ елемената – гледати смењивање операције AND и OR ).

Излазни сигнал  $Z_3$ :

$x_3x_2$		00	01	11	10
$x_1x_0$	00	0 0	0 4	1 2	0 8
	01	0 1	0 5	1 13	0 9
	11	0 3	0 7	0 15	1 11
	10	0 2	0 6	1 14	0 10

ДНФ:

$$Z_3 = x_3x_2\bar{x}_1 + x_3x_2\bar{x}_0 + x_3\bar{x}_2x_1x_0 \xrightarrow{\text{факторисање}} Z_3 = x_3(x_2(\bar{x}_1 + \bar{x}_0) + \bar{x}_2x_1x_0)$$

Број логичких елемената \* (И, ИЛИ и НЕ): **6**

\* Дозвољене комплементарне вредности улаза

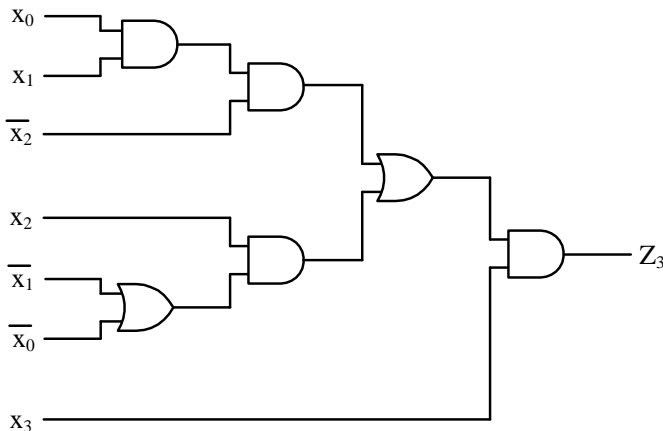
$x_3x_2$		00	01	11	10
$x_1x_0$	00	0 0	0 4	1 12	0 8
	01	0 1	0 5	1 13	0 9
	11	0 3	0 7	0 15	1 11
	10	0 2	0 6	1 14	0 10

КНФ:

$$Z_3 = x_3(x_2 + x_1)(x_2 + x_0)(\bar{x}_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_0) \xrightarrow{\text{факторисање}} Z_3 = x_3(x_2 + x_1x_0)(\bar{x}_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_0)$$

Број логичких елемената \* (И, ИЛИ и НЕ): **6**

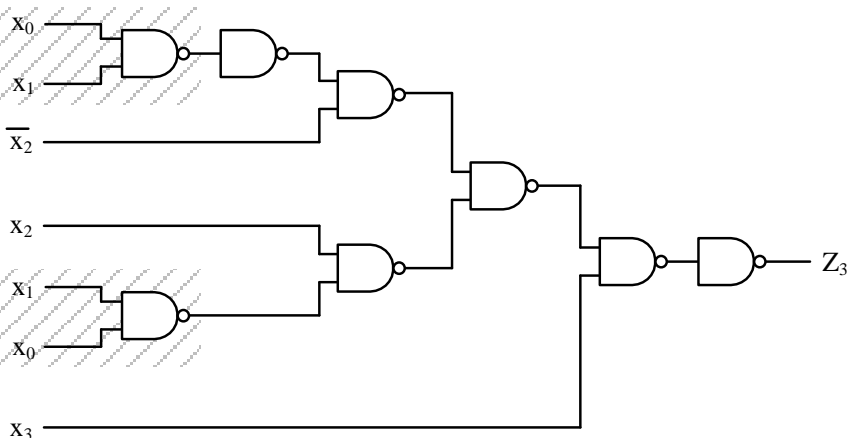
\* Дозвољене комплементарне вредности улаза



Дискусија:

Потребно је обратити пажњу како се групишу сигнали у двоулазна кола, јер као последицу одабира можемо да смањимо шему са НИ колима.

На слици је шрафиран део шеме који се понавља. Довољно је реализовати једно коло, а затим га искористи у другом делу шеме.



Излазни сигнал  $Z_2$ :

	$X_3X_2$			
$X_1X_0$	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0	0	1
11	0	0	1	0
10	0	0	0	1

ДНФ:

$$Z_2 = \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1} + \overline{x_3} \overline{x_2} x_0 + \overline{x_3} x_2 \overline{x_1} x_0 \xrightarrow{\text{факторисање}} Z_3 = x_3 (\overline{x_2} (\overline{x_1} + \overline{x_0}) + x_2 x_1 x_0)$$

Број логичких елемената \* (И, ИЛИ и НЕ): **6**

\* Дозвољене комплементарне вредности улаза

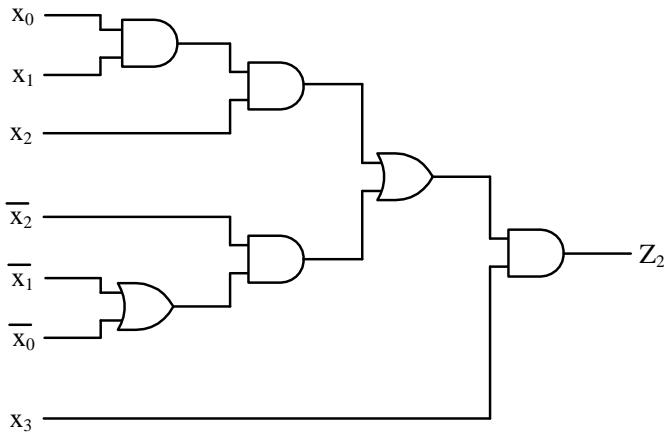
	$X_3X_2$			
$X_1X_0$	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0	0	1
11	0	0	1	0
10	0	0	0	1

КНФ:

$$Z_3 = x_3 (\overline{x_2} + x_1) (\overline{x_2} + x_0) (x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0}) \xrightarrow{\text{факторисање}} Z_3 = x_3 (\overline{x_2} + x_1 x_0) (x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0})$$

Број логичких елемената \* (И, ИЛИ и НЕ): **6**

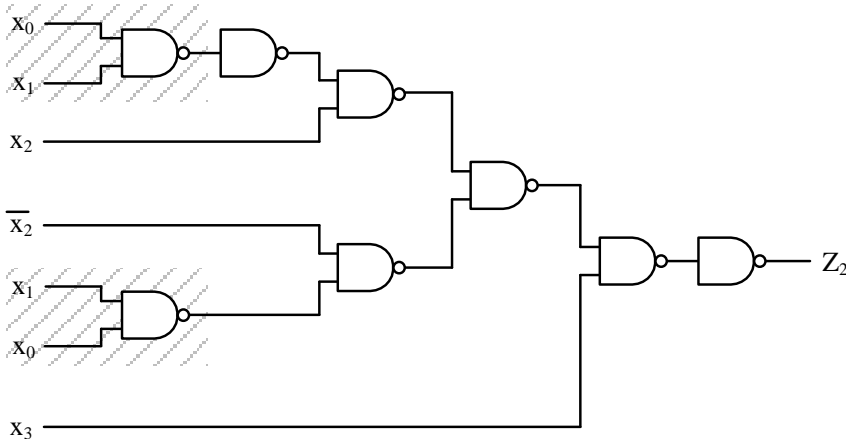
\* Дозвољене комплементарне вредности улаза



Дискусија:

Потребно је обратити пажњу како се групишу сигнали у двоулазна кола, јер као последицу одабира можемо да смањимо шему са НИ колима.

На слици је шрафиран део шеме који се понавља. Довољно је реализовати једно коло, а затим га искористи у другом делу шеме.



Ислазни сигнал  $Z_1$ :

		$x_3x_2$			
		00	01	11	10
$x_1x_0$	00	1 <sub>0</sub>	0 <sub>4</sub>	0 <sub>12</sub>	0 <sub>8</sub>
	01	1 <sub>1</sub>	0 <sub>5</sub>	0 <sub>13</sub>	0 <sub>9</sub>
	11	1 <sub>3</sub>	0 <sub>7</sub>	0 <sub>15</sub>	0 <sub>11</sub>
	10	1 <sub>2</sub>	0 <sub>6</sub>	0 <sub>14</sub>	0 <sub>10</sub>

ДНФ:

$$Z_1 = \overline{x_3} \cdot \overline{x_2}$$

Број логичких елемената \* (И, ИЛИ и НЕ): 2

\* Дозвољене комплементарне вредности улаза

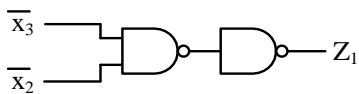
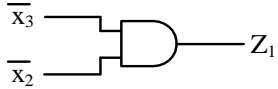
		$x_3x_2$			
		00	01	11	10
$x_1x_0$	00	1 <sub>0</sub>	0 <sub>4</sub>	0 <sub>12</sub>	0 <sub>8</sub>
	01	1 <sub>1</sub>	0 <sub>5</sub>	0 <sub>13</sub>	0 <sub>9</sub>
	11	1 <sub>3</sub>	0 <sub>7</sub>	0 <sub>15</sub>	0 <sub>11</sub>
	10	1 <sub>2</sub>	0 <sub>6</sub>	0 <sub>14</sub>	0 <sub>10</sub>

КНФ:

$$Z_1 = \overline{x_3} \cdot \overline{x_2}$$

Број логичких елемената \* (И, ИЛИ и НЕ): 2

\* Дозвољене комплементарне вредности улаза



Ислазни сигнал  $Z_0$ :

	$x_3x_2$			
	00	01	11	10
$x_1x_0$	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	0	0
11	0	1	0	0
10	0	1	0	0

ДНФ:

$$Z_0 = \overline{x_3}x_2$$

Број логичких елемената \* (И, ИЛИ и НЕ): **1**

\* Дозвољене комплементарне вредности улаза

	$x_3x_2$			
	00	01	11	10
$x_1x_0$	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	0	0
11	0	1	0	0
10	0	1	0	0

КНФ:

$$Z_0 = \overline{x_3}x_2$$

Број логичких елемената \* (И, ИЛИ и НЕ): **1**

\* Дозвољене комплементарне вредности улаза

