I колоквијум из Основа рачунарске технике I - 2013/2014

(22.03.2014.)

Р е ш е њ е

Задатак 1

Из разматрања треба изузети векторе за које је у тексту задатка речено да се не никада не јављају. Ове векторе записујемо као скуп f(b) и g(b).

f(b)={2, 6, 15}

g(b)={2, 6, 15}

Потребно је проверити на којим векторима две функције имају једнаке вредности. То можемо урадити тако што ћемо за сваку функцију одредити вредности на свим векторима и затим упоредити. Како је функција $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ дата у облику КНФ, лакше је одредити коњуктивни покривач ове функције, а како је функција $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ дата у облику ДНФ, лакше је одредити дисјунктивни покривач ове функције. Добијамо:

f(0)={0X1X, 10X1, 101X, 0XX0}

g(1)={00X0, X1X1, 1X0X, 1X00}

Сада потпуним развијањем кубова, можемо одредити све векторе на којима функција $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ има вредност нула, односно све векторе на којима функција $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ има вредност један.

f(0) = {0010, 0011, 0110, 0111, 1001, 1011, 1010, 1011, 0000, 0010, 0100, 0110}=
  = {0000, 0010, 0011, 0100, 0110, 0111, 1001, 1010, 1011}=
  = {0, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11}

g(1) = {0000, 0010, 0101, 0111, 1101, 1111, 1000, 1001, 1100, 1101, 1000, 1100} =
  = {0000, 0010, 0101, 0111, 1000, 1001, 1100, 1101, 1111} =
  = {0, 2, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 15}

Сада је потребно из разматрања искључити векторе који се никада не јављају.

f(0) = {0, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11}/{2, 6, 15} = {0, 3, 4, 7, 9, 10, 11}

g(1) = {0, 2, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 15}/{2, 6, 15} = {0, 5, 7, 8, 9, 12, 13}

Сада је потребно одредити f(1) и g(0). Пошто се ради о непотпуно дефинисаним функцијама, треба из разматрања изузети векторе на којима функција није дефинисана (за које је речено да се никада не јављају), дакле функција $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула, а на којима је дефинисана. Аналогно важи и за функцију $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ која има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један, а на којима је дефинисана.

f(1)={1, 5, 8, 12, 13, 14}

g(0)={1, 3, 4, 10, 11, 14}

Сада треба одредити на којим векторима важи f(1)=g(1), као и на којим векторима важи f(0)=g(0): {3, 4, 5, 8, 10, 11, 12, 13} и то представља решење.

Задатак 2

a)

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{(x_2 + \bar{x}_3 + x_4) \cdot (x_3 + (\overline{\bar{x}_1 x_4} \cdot (x_2 + x_4)))} + \overline{(\bar{x}_1 + (x_3 + \bar{x}_2 \bar{x}_4) \cdot \overline{x_2 x_3})}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((\overline{x_2 + \bar{x}_3 + x_4}) + \overline{(x_3 + (\overline{\bar{x}_1 x_4} \cdot (x_2 + x_4)))}) + (x_1 \cdot \overline{\overline{(x_3 + \bar{x}_2 \bar{x}_4) \cdot \overline{x_2 x_3}}})$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 + (\bar{x}_3 \cdot \overline{(\overline{\bar{x}_1 x_4} \cdot (x_2 + x_4))})) + (x_1 \cdot ((\overline{x_3 + \bar{x}_2 \bar{x}_4}) + x_2 x_3))$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 + (\bar{x}_3 \cdot (\bar{x}_1 x_4 + \bar{x}_2 \bar{x}_4))) + (x_1 \cdot (\bar{x}_3 \cdot (x_2 + x_4) + x_2 x_3))$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_3 x_4 + x_1 x_2 x_3$$

f(1)={X010, 0X01, X000, 110X, 1X01, 111X}=
={0000, 0001, 0010, 0101, 1000, 1001, 1010, 1100, 1101, 1110, 1111}=
={0, 1, 2, 5, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15}

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1		1	1
01	1	1	1	1
11			1	
10	1		1	1

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + \bar{x}_3x_4 + \bar{x}_2\bar{x}_4$$

б) $f(1) = \{10X, 110, 011\}$

$f(1) = \{100, 101, 110, 011\} = \{4,5,6,3\} = \{3,4,5,6\}$

$f(0) = \{0,1,2,7\}$

x_3 \ x_1x_2	00	01	11	10
0	0	0		
1	0		0	

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3)\cdot(x_1 + x_2)\cdot(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)$$

в) $f(1) = \{0,1,5,6,7,8\}$

$f(b) = \{2,3\}$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		
11	b	1		
10	b	1		

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_4 + \bar{x}_1x_3$$

f (1)= { X000, 0XX1, 0X1X }

Задатак 3

Комбинациона мрежа коју треба реализовати има четири улазна сигнала (x_1, x_2, x_3, x_4) који представљају бинарну представу масе пошиљке, изражену у килограмима, и шест излазних сигнала (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6), који представљају *BCD*[1] вредност поштарине коју плаћа пошиљалац, изражену у еврима. Помоћу четири улазна сигнала, можемо да формирамо 16 улазних вектора, који представљају масу пошиљке од 0 до 15 кг. Пошиљка може бити масе од 1 до 12 килограма, што значи да користимо улазне векторе од 0001 до 1100. Улазни вектор 0000 је иницијално стање ваге (0 кг) и он показује вредност 00 0000 на излазу. Улазни вектори 1101, 1110 и 1111 нису дефинисани, односно маса пошиљке од 13 кг и веће не могу да се измере на овој ваги (на излазу: bb bbbb).

Излаз комбинационе мреже, у €, рачуна се према две формуле дате у задатку:

- за пошиљке од 1 кг до 4 кг, према формули: (маса_пошиљке x 2€) + 6€
- за пошиљке од 5 кг до 12 кг, према формули: (маса_пошиљке x 3€)

и исписује у *BCD* облику.

Прво ћемо да формирамо комбинациону таблицу:

x_1	x_2	x_3	x_4	Маса пошиљке (кг)	Излаз (€)	Излазни сигнали					
						z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	8	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	2	10	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	3	12	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	4	14	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	5	15	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	6	18	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	7	21	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	8	24	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	9	27	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	10	30	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	11	33	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	12	36	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	/	није деф.	b	b	b	b	b	b
1	1	1	0	/	није деф.	b	b	b	b	b	b
1	1	1	1	/	није деф.	b	b	b	b	b	b

Сада можемо формирати Карноове карте за сваки излаз ове комбинационе мреже. Прекидачку функцију ћемо писати у облику минималне ДНФ, а онда ћемо извршити трансформацију мреже да добијемо мрежу са што мање двоулазних НИ елемената.

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	b	1
11	0	1	b	1
10	0	0	b	1

$$z_1 = x_1 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$$

[1] *BCD - Binary-coded decimal,* бинарна репрезентација било које децималне цифре од 0 (0000) до 9 (1001). Двоцифрени бројеви се представљају са 8 цифара (нпр. 10 - 0001 0000), троцифрени са 12 цифара,... итд. Могуће је број представити у BCD облику и са бројем цифара који није дељив са 4, на пример са 6 цифара, али само уколико две водеће нуле нису битне (нпр. 35 може да се представи и као 11 0101, без две водеће нуле). Више информација: http://en.wikipedia.org/wiki/Binary-coded_decimal

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	b	0
11	1	0	b	1
10	1	1	b	1

$$z_2 = x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot x_3 + x_3 \cdot \overline{x_4}$$

или

$$z_2 = x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_4}$$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	b	0
11	0	0	b	0
10	0	1	b	0

$$z_3 = x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	1	b	1
11	0	0	b	0
10	0	0	b	0

$$z_4 = x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_3}$$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	b	1
11	1	0	b	1
10	0	0	b	0

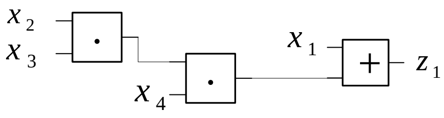
$$z_5 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_4 + \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4$$

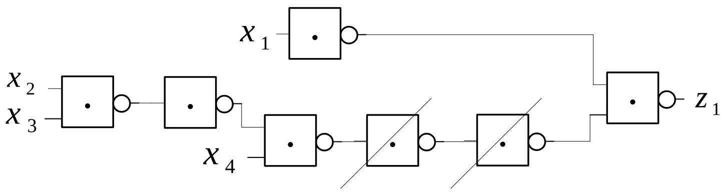
x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	b	1
11	0	1	b	1
10	0	0	b	0

$$z_6 = x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_4$$

Сада реализујемо комбинациону мрежу са НЕ, И и ИЛИ елементима, за сваки излазни сигнал цртамо по једну слику, и трансформишемо затим ту мрежу у мрежу са двоулазним НИ елементима.

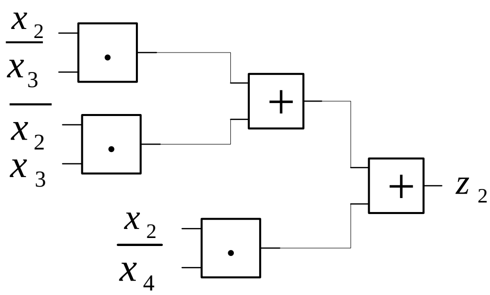
$z_1 = x_1 + (x_2 \cdot x_3)\cdot x_4$



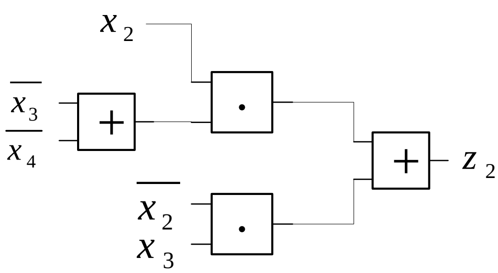


Пошто је дозвољен комплемент на улазу, овде се може уштедети још један НИ елемент, код x_1, тако што се пише $\overline{x_1}$.

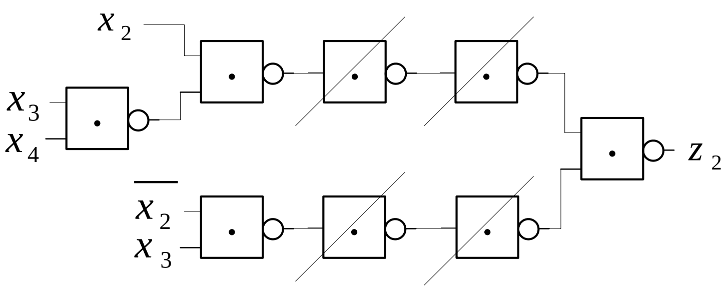
$z_2 = x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot x_3 + x_2 \cdot \overline{x_4} = x_2 \cdot (\overline{x_3} + \overline{x_4}) + \overline{x_2} \cdot x_3$



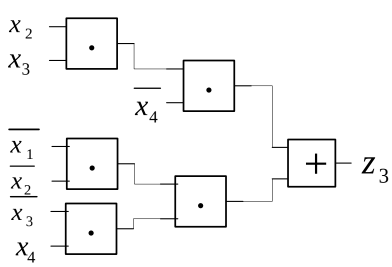
(мрежа пре сређивања)

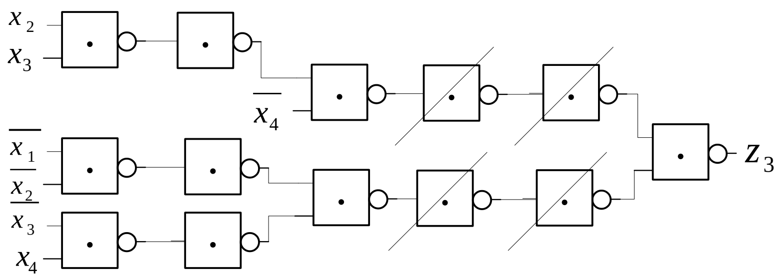


(мрежа након сређивања)



$z_3 = (x_2 \cdot x_3)\cdot \overline{x_4} + (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2})\cdot(\overline{x_3} \cdot x_4)$





$$z_4 = x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_3} = \overline{x_3} \cdot (x_1 + x_2)$$

$$z_5 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_4 + \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4 = x_1 \cdot x_2 + x_4 \cdot (x_1 + \overline{x_2} \cdot x_3)$$

$$z_6 = x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_4 = x_4 \cdot (x_1 + x_2)$$