I колоквијум из Основа рачунарске технике I - 2010/2011

(20.03.2011.)

Р е ш е њ е

Задатак 1

а) Функције се разликују на оним векторима где имају различите вредности, односно где важи да је f(0) = g(1) и f(1) = g(0). Да бисмо то урадили, можемо за сваку функцију да одредимо вредности на свим векторима, а затим да их упоредимо. Како је функција $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ дата у облику КНФ, лакше је одредити коњуктивни покривач ове функције, а како је функција $g(x_1,x_2,x_3,x_4)$ дата у облику ДНФ, лакше је одредити дисјунктивни покривач ове функције. Према описаним правилима на вежбама, за представљање нормалних форми помоћу кубова добијамо:

f(0) = {00X1, 1X10, X110, 110X}
g(1) = {00X0, 01X1, 100X, 11XX}

Потпуним развијањем ових кубова, можемо одредити све векторе на којима функција f има вредност нула, односно све векторе на којима функција g има вредност један:

f(0) ={0001, 0011, 1010, 1110, 0110, 1110, 1100, 1101}
= {1, 3, 6, 10, 12, 13, 14}
g(1) ={0000, 0010, 0101, 0111, 1000, 1001, 1100, 1101, 1110, 1111}
= {0, 2, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15}

Када одредимо f(0) и g(1), морамо да одредимо и f(1) и g(0). Пошто се ради о потпуно дефинисаној прекидачкој функцији, функција f има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула. Аналогно важи и за функцију g, која има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један:

f(1) ={0, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 15}
g(0) ={1, 3, 4, 6, 10, 11}

Комбинациона таблица за функције f и g изгледа овако:

i	x_1	x_2	x_3	x_4	f	g
0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	1	0	1	1
3	0	0	1	1	0	0
4	0	1	0	0	1	0
5	0	1	0	1	1	1
6	0	1	1	0	0	0
7	0	1	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1	1
9	1	0	0	1	1	1
10	1	0	1	0	0	0
11	1	0	1	1	1	0
12	1	1	0	0	0	1
13	1	1	0	1	0	1
14	1	1	1	0	0	1
15	1	1	1	1	1	1

Као што видимо скуп вектора на којима се функције разликују, односно где важи f(0) = g(1) и f(1) = g(0) је следећи: **{ 4, 11, 12, 13, 14 }** б)

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{(\overline{\bar{x}_1+x_2}+\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_4)}+(\overline{\bar{x}_2\cdot\bar{x}_4+x_2\cdot x_3})$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{(x_1\bar{x}_2+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4)}+(\overline{\bar{x}_2\cdot\bar{x}_4}\cdot\overline{x_2\cdot x_3})$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\overline{x_1\bar{x}_2}\cdot\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4})+((x_2+x_4)\cdot(\bar{x}_2+\bar{x}_3))$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=((\bar{x}_1+x_2)\cdot(x_1+x_2+x_4))+(x_2\bar{x}_2+\bar{x}_2x_4+x_2\bar{x}_3+\bar{x}_3x_4)$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1\bar{x}_1+x_1x_2+\bar{x}_1x_2+x_2x_2+\bar{x}_1x_4+x_2x_4)+(\bar{x}_2x_4+x_2\bar{x}_3+\bar{x}_3x_4)$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+\bar{x}_1x_2+x_2+\bar{x}_1x_4+x_2x_4+\bar{x}_2x_4+x_2\bar{x}_3+\bar{x}_3x_4$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2(x_1+\bar{x}_1+1+x_4+\bar{x}_3)+\bar{x}_1x_4+\bar{x}_2x_4+\bar{x}_3x_4$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2+x_4(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_2+x_4)(x_2+\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_2+x_4)(1+\bar{x}_1+\bar{x}_3)$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_2+x_4)$$

f(0)={X0X0}={0000, 0010, 1000, 1010}={0, 2, 8, 10}

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1+x_2+\bar{x}_3+x_4)(\bar{x}_1+x_2+x_3+x_4)(\bar{x}_1+x_2+\bar{x}_3+x_4)$$

Задатак 2

а) На самом почетку, применом правила Булове алгебре, морамо да средимо функцију и доведемо је у ДНФ или КНФ облик, како бисмо знали где функција има вредност 0 или 1. Сређивање почињемо применом Де Моргановe теореме на изразе $\overline{(x_2+\bar{x}_3+x_4)}$, $\overline{(x_1+\bar{x}_4)}$ и $\overline{x_3\cdot(\bar{x}_2+x_3+x_4)}$:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_2\cdot\bar{x}_3+\overline{(\overline{\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4}+\bar{x}_1\cdot x_4+\bar{x}_3+\overline{(\bar{x}_2+x_3+x_4)})})$$

Даљом применом Де Моргановe теореме добијамо:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2\cdot\bar{x}_3+\overline{((x_1+x_2+\bar{x}_3+x_4)+\bar{x}_1\cdot x_4+\bar{x}_3+x_2\cdot\bar{x}_3\cdot\bar{x}_4)}$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2\cdot\bar{x}_3+\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4\cdot(x_1+\bar{x}_4)\cdot x_3\cdot(\bar{x}_2+x_3+x_4)$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2\cdot\bar{x}_3+\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4\cdot(x_1+\bar{x}_4)\cdot(\bar{x}_2+x_3+x_4)$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2\cdot\bar{x}_3+\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4\cdot(x_1\cdot\bar{x}_2+\bar{x}_2\cdot\bar{x}_4+x_1\cdot x_3+x_3\cdot\bar{x}_4+x_1\cdot x_4+x_4\cdot\bar{x}_4)$$

Даљим сређивањем, применом закона о комплементу, када је $x_i\cdot\bar{x}_i=0$, добијамо:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2\cdot\bar{x}_3+x_1\cdot\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4+\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4+x_1\cdot\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4+\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4+$$
$$+x_1\cdot\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot\bar{x}_4+\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot\bar{x}_4)$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2\cdot\bar{x}_3+\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3\cdot\bar{x}_4$$

Према описаним правилима на вежбама, за представљање нормалних форми помоћу кубова, сада ћемо функцију, коју смо добили у ДНФ облику да представимо овако:

f(1) ={X10X, 0010}={0100, 0101, 1100, 1101, 0010} = {2, 4, 5, 12, 13}

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	0

На крају формирамо минималну КНФ функције, као производ елементарних сума:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3)\cdot(\overline{x}_3 + \overline{x}_4)\cdot(\overline{x}_2 + \overline{x}_3)\cdot(\overline{x}_1 + x_2)$$

б) Функција f је дата у облику КНФ, па ћемо одредити где та функција има вредност нула, према правилима за представљање нормалних форми помоћу кубова:

f(0) = {0X0, X11, 000, 100} = {000, 010, 011, 111, 000, 100} = {0, 2, 3, 4, 7}

Сада је потребно одредити f(1), а пошто је ова прекидачка функција потпуно дефинисана (нема f(b)), функција f има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула:

f(1) = {1, 5, 6}

Према правилима за одређивање минималне ДНФ прекидачке функције, помоћу Карноове карте, за функцију f која има три промењљиве x_1,x_2,x_3, добијамо:

x_3 \ x_1x_2	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	0	1

На крају формирамо минималну ДНФ функције, као суму елементарни производа, при чему сваки производ представља једну заокружену фигуру:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3$$

в) У задатку је дат скуп вектора на којима функција f има вредност један - f(1), а пошто се тражи минимална КНФ функције, потребно је да одредимо где функција има вредност нула - f(0).

f(1) = {3, 4, 6, 7, 11, 12, 14}
f(0) = {0, 1, 2, 5, 8, 9, 10, 13, 15}

Дакле, функција f има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један. Затим нацртамо Карноову карту за функцију f која зависи од 4 промењљиве и попунимо она поља где функција има вредност нула - f(0):

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0			0
01	0	0	0	0
11			0	
10	0			0

У Карноовој карти налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога за сваку фигуру исписујемо елементарну суму, која одговара тој фигури и добијамо минималну КНФ, као производ елементарних сума:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_4)(x_3 + \overline{x}_4)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_4)$$

г) У задатку је дат скуп вектора на којима функција f има вредност нула - f(0) и скуп вектора на којима функција није дефинисана - f(b), а пошто се тражи минимална ДНФ функције, потребно је да одредимо где функција има вредност један - f(1).

Дакле, функција f има вредност један на свим векторима, осим оних на којима има вредност нула и на којима није дефинисана. Затим нацртамо Карноову карту за функцију f која зависи од 4 промењљиве и попунимо она поља где функција има вредност један и она поља где функција није дефинисана - f(b). Вектори на којима функција није дефинисана у Карноовој карти се обележавају са b и они могу бити врло битни при добијању минималнијег решења. Како нам није важно коју вредност функција има на овим векторима, јер се они никада не јављају, можемо користити ту вредност и као нулу и као јединицу, у циљу добијања минималнијег решења.

f(0) ={0, 1, 4, 6, 8, 12, 14}
f(b) = {2, 7, 11, 13}
f(1) ={3, 5, 9, 10, 15}

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00				
01		1	b	1
11	1	b	1	b
10	b			1

Из Карноове карте налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога за сваку фигуру исписујемо елементарни производ, који одговара свакој од тих фигура и добијамо минималну ДНФ, као суму елементарних производа:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_2 x_3 + x_2 x_4 + x_1 x_4$$