

Надокнада I колоквијума из Основа рачунарске технике I - 2010/2011
(08.05.2011.)
Р е ш е њ е

Задатак 1

$$a) \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3) \cdot (x_2 + x_3 + x_4) \cdot (x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (x_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3\bar{x}_4 + x_2x_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$$

Функције су једнаке на оним векторима где имају исте вредности, односно где важи да је $f(0) = g(0)$ и $f(1) = g(1)$. Да бисмо то урадили, можемо за сваку функцију да одредимо вредности на свим векторима, а затим да их упоредимо. Како је функција $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ дата у облику КНФ, лакше је одредити коњуктивни покривач ове функције, а како је функција $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ дата у облику ДНФ, лакше је одредити дисјунктивни покривач ове функције. Према описаним правилима на вежбама, за представљање нормалних форми помоћу кубова добијамо:

$$f(0) = \{110X, X000, 001X, X011\}$$

$$g(1) = \{XX10, X11X, 01X0, 1001\}$$

Потпуним развијањем ових кубова, можемо одредити све векторе на којима функција f има вредност нула, односно све векторе на којима функција g има вредност један:

$$f(0) = \{1100, 1101, 0000, 1000, 0010, 0011, 0111, 1011\}$$

$$= \{0, 2, 3, 8, 11, 12, 13\}$$

$$g(1) = \{0010, 0110, 1010, 1110, 0111, 1110, 1111, 0100, 0110, 1001\}$$

$$= \{2, 4, 6, 7, 9, 10, 14, 15\}$$

Када одредимо $f(0)$ и $g(1)$, морамо да одредимо и $f(1)$ и $g(0)$. Пошто се ради о потпуно дефинисаној прекидачкој функцији, функција f има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула. Аналогно важи и за функцију g , која има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један:

$$f(1) = \{1, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 14, 15\}$$

$$g(0) = \{0, 1, 3, 5, 8, 11, 12, 13\}$$

Као што видимо скуп вектора на којима су функције једнаке, односно где важи $f(0) = g(0)$ и $f(1) = g(1)$ је следећи: **$\{0, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$**

$$b) \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4)} + \overline{(\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4 + x_2 \cdot x_3)}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{(\bar{x}_1 + x_2 + (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_4))} + \overline{(\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4 \cdot x_2 \cdot x_3)}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{(\bar{x}_1 + x_2 + (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_4))} + \overline{(\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4 \cdot x_2 \cdot x_3)}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{(\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_4))} + ((x_2 + x_4) \cdot x_2 \cdot x_3)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \overline{(\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4)}) + (x_2x_2x_3 + x_2x_3x_4)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot ((x_1 + x_2) \cdot \bar{x}_4)) + (x_2x_3 + x_2x_3x_4)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot (x_1\bar{x}_4 + x_2\bar{x}_4)) + x_2x_3 \cdot (1 + x_4)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1\bar{x}_2x_1\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_2\bar{x}_4) + x_2x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 + x_2x_3$$

$$f(1) = \{10X0, X11X\} = \{1000, 1010, 0110, 0111, 1110, 1111\}$$

$$= \{0110, 0111, 1000, 1010, 1110, 1111\} = \{6, 7, 8, 10, 14, 15\}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3x_4$$

Задатак 2

а) Применом правила Булове алгебре, морамо да средимо функцију и доведемо је у ДНФ облик:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3) \cdot (\overline{x_3} + x_4(x_2 + \overline{x_1})) \cdot (\overline{x_2} + x_3) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_3} + x_2) + x_2(x_3 + \overline{x_1} + x_4)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_3} + x_4 \cdot \overline{x_2} \cdot x_1) \cdot (\overline{x_2} + x_3) \cdot (((x_1 + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_3} + x_2)) \cdot (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}))$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_3} + x_4 \cdot \overline{x_2} \cdot x_1 + x_2 + x_3) \cdot (((x_1 + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_3} + x_2)) \cdot (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}))$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + \overline{x_1} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_4} + x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4})$$

Даљим сређивањем, применом закона о комплементу, када је $x_i \cdot \overline{x_i} = 0$, добијамо:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}$$

Према описаним правилима на вежбама, за представљање нормалних форми помоћу кубова, сада ћемо функцију, коју смо добили у ДНФ облику да представимо овако:

$$f(1) = \{0X00, 01X0, 111X, 11X1, X110, 100X, 1X01, X000\} = \\ \{0000, 0100, 0100, 0110, 1110, 1111, 1101, 1111, 0110, 1110, 1000, 1001, \\ 1001, 1101, 0000, 1000\} = \{0, 4, 6, 8, 9, 13, 14, 15\}$$

		x_1x_2			
		x_3x_4	00	01	11
00	1	1			1
01			1		1
11			1		
10		1	1		

На крају формирамо минималну ДНФ функције, као суму елементарних производа:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$$

б) Функција f је дата у облику ДНФ, па ћемо одредити где та функција има вредност један, према правилима за представљање нормалних форми помоћу кубова:

$$f(1) = \{0X11, X000, 1101, 00X0, X110, 111X\} = \\ \{0010, 0110, 0000, 1000, 1101, 0000, 0010, 0110, 1110, 1111\} = \\ \{0, 2, 6, 8, 13, 14, 15\}$$

Сада је потребно одредити $f(0)$, а пошто је ова прекидачка функција потпуно дефинисана (нема $f(b)$), функција f има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један:

$$f(0) = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12\}$$

Према правилима за одређивање минималне КНФ прекидачке функције, помоћу Карноове карте, за функцију f која има четири променљиве x_1, x_2, x_3, x_4 , добијамо:

x_1x_2		x_3x_4			
		00	01	11	10
		00	01	11	10
	00		0	0	
	01	0	0		0
	11	0	0		0
	10				0

На крају формирамо минималну КНФ функције, као производ елементарних сума:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_2} + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_2} + x_3 + x_4) \cdot (x_1 + x_2 + \overline{x_3})$$

в) У задатку је дат скуп вектора на којима функција f има вредност нула - $f(0)$, а пошто се тражи минимална ДНФ функције, потребно је да одредимо где функција има вредност један - $f(1)$.

$$f(0) = \{7, 13, 15\}$$

$$f(1) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14\}$$

Дакле, функција f има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула. Затим нацртамо Карноову карту за функцију f која зависи од 4 променљиве и попунимо она поља где функција има вредност један - $f(1)$:

x_1x_2		x_3x_4			
		00	01	11	10
		00	01	11	10
	00	1	1	1	1
	01	1	1		1
	11	1			1
	10	1	1	1	1

У Карноовој карти налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога за сваку фигуру исписујемо елементарни производ, који одговара тој фигури и добијамо минималну ДНФ, као суму елементарних производа:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_4} + \overline{x_2} + \overline{x_1}\overline{x_3}$$

г) У задатку је дат скуп вектора на којима функција f има вредност један - $f(1)$ и скуп вектора на којима функција није дефинисана - $f(b)$, а пошто се тражи минимална КНФ функције, потребно је да одредимо где функција има вредност нула - $f(0)$.

Дакле, функција f има вредност нула на свим векторима, осим оних на којима има вредност један и на којима није дефинисана. Затим нацртамо Карноову карту за функцију f која зависи од 4 променљиве и попунимо она поља где функција има вредност нула и она поља где функција није дефинисана - $f(b)$. Вектори на којима функција није дефинисана у Карноовој карти се обележавају са b и они могу бити врло битни при добијању минималнијег решења. Како нам није важно коју вредност функција има на овим векторима, јер се они никада не јављају, можемо користити ту вредност и као нулу и као јединицу, у циљу добијања минималнијег решења.

$$f(1) = \{1, 4, 5, 11, 14, 15\}$$

$$f(b) = \{2, 3, 8, 9, 12\}$$

$$f(0) = \{0, 6, 7, 10, 13\}$$

$\begin{array}{c} x_1x_2 \\ x_3x_4 \end{array}$		x_1x_2			
		00	01	11	10
00	00	$\emptyset$		b	$\emptyset$
01	01			0	b
11	11	b	0		
10	10	$\emptyset$	0		$\emptyset$

Из Карноове карте налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога за сваку фигуру исписујемо елементарну суму, која одговара свакој од тих фигура и добијамо минималну КНФ, као производ елементарних сума:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_4)(\bar{x}_1 + x_3)(x_1 + \bar{x}_3)$$