I колоквијум из Основа рачунарске технике I - 2009/2010
(28.03.2010.)
Р е ш е њ е

Задатак 1

а) Функције се разликују на оним векторима где имају различите вредности, односно где важи да је f(0) = g(1) и f(1) = g(0). Да бисмо то урадили, можемо за сваку функцију да одредимо вредности на свим векторима, а затим да их упоредимо. Како је функција $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ дата у облику КНФ, лакше је одредити коњуктивни покривач ове функције, а како је функција $g(x_1,x_2,x_3,x_4)$ дата у облику ДНФ, лакше је одредити дисјунктивни покривач ове функције. Према описаним правилима на вежбама, за представљање нормалних форми помоћу кубова добијамо:

f(0) ={00XX, 011X, 10X1, 1X0X}
g(1) ={0X11, X1X1, 011X, 11XX}

Потпуним развијањем ових кубова, можемо одредити све векторе на којима функција f има вредност нула, односно све векторе на којима функција g има вредност један:

f(0) ={0000, 0001, 0010, 0011, 0110, 0111, 1001, 1011, 1000, 1001, 1100, 1101}
= {0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13}
g(1) ={0011, 0111, 0101, 0111, 1101, 1111, 0110, 0111, 1100, 1101, 1110, 1111}
= {3, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15}

Када одредимо f(0) и g(1), морамо да одредимо и f(1) и g(0). Пошто се ради о потпуно дефинисаној прекидачкој функцији, функција f има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула. Аналогно важи и за функцију g, која има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један:

f(1) ={4, 5, 10, 14, 15}
g(0) ={0, 1, 2, 4, 8, 9, 10, 11}

Као што видимо скуп вектора на којима се функције разликују, односно где важи f(0) = g(1) и f(1) = g(0) је следећи: **{ 3, 4, 6, 7, 10, 12, 13 }**

б) Сређивање почињемо применом Де Моргановe теореме на израз $\overline{(x_1 + x_3)}$ и добијамо следећи израз:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot \overline{(\bar{x}_1\bar{x}_2 + x_1x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_3 \cdot (x_1 + \bar{x}_2))}$$

Затим множимо $\bar{x}_1\bar{x}_3 \cdot (x_1 + \bar{x}_2)$, добијамо $\bar{x}_1\bar{x}_3x_1 + \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_2$, па ћемо применом закона о комплементу $x_1\bar{x}_1 = 0$ добити:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot \overline{(\bar{x}_1\bar{x}_2 + x_1x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3)}$$

Поново ћемо применити Де Морганову теорему на израз $\overline{(\bar{x}_1\bar{x}_2 + x_1x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3)}$, а затим и на $\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2} \cdot \overline{x_1x_3} \cdot \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3}$, па добијамо:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)(x_1 + x_2)(\bar{x}_1 + \bar{x}_3)(x_1 + x_2 + x_3)$$

Како је функција f дата у облику КНФ, лакше је одредити коњуктивни покривач ове функције и након тога одредити СКНФ. Према описаним правилима на вежбама, за представљање нормалних форми помоћу кубова добијамо:

f(0) = {101X, 00XX, 1X1X, 000X}=
{1010, 1011, 0000, 0001, 0010, 0011, 1010, 1011, 1110, 1111, 0000, 0001}=
{0, 1, 2, 3, 10, 11, 14, 15}

f(1) = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13} //у случају да нам се тражи СДНФ користили би f(1)

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1+x_2+x_3+\bar{x}_4)(x_1+x_2+\bar{x}_3+x_4)(x_1+x_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4)$$
$$(\bar{x}_1+x_2+\bar{x}_3+x_4)(\bar{x}_1+x_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+x_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4)$$

Задатак 2

а) Функција f је дата у облику ДНФ, па ћемо одредити где та функција има вредност један, према правилима за представљање нормалних форми помоћу кубова:

f(1) = {1X0, X00, 111} = {100, 110, 000, 100, 111} = {0, 4, 6, 7}

Сада је потребно одредити f(0), а пошто је ова прекидачка функција потпуно дефинисана (нема f(b)), функција f има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један:

f(0) = {1, 2, 3, 5}

Према правилима за одређивање минималне КНФ прекидачке функције, помоћу Карноове карте, за функцију f која има три променљиве x_1,x_2,x_3, добијамо:

x_3 \ x_1x_2	00	01	11	10
0		0		
1	0	0		0

На крају формирамо минималну КНФ функције, као производ елементарних сума:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+\bar{x}_2)(x_2+\bar{x}_3)$$

б) На самом почетку, применом правила Булове алгебре, морамо да средимо функцију и доведемо је у ДНФ облик. Срећивање почињемо применом Де Моргановe теореме на изразе $\overline{x_2\cdot\overline{x_4}}$ и $\overline{x_3\cdot x_4}$:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1\cdot\overline{(\bar{x}_2+\bar{x}_3+(\bar{x}_2+x_4)x_1+(\bar{x}_3+\bar{x}_4))}+(x_1+\bar{x}_1)\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1x_2x_4$$

Даљим срећивањем, применом закона о комплементу $x_1+\bar{x}_1=1$ добијамо:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1\cdot\overline{(\bar{x}_2+\bar{x}_3+x_1\bar{x}_2+x_1x_4+\bar{x}_3+\bar{x}_4)}+\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1x_2x_4$$

Затим у изразу испод комплемента, ако применимо правило $\bar{x}_3+\bar{x}_3=\bar{x}_3$ и извучемо заједнички члан x_2 у изразу $\bar{x}_2+x_1\bar{x}_2$ добијамо:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1\cdot\overline{(\bar{x}_2(1+x_1)+\bar{x}_3+x_1x_4+\bar{x}_4)}+\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1x_2x_4$$

Даљим срећивањем, применом правила $x_1+1=1$ добијамо:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1\cdot\overline{(\bar{x}_2+\bar{x}_3+x_1x_4+\bar{x}_4)}+\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1x_2x_4$$

Применом Де Морганове теореме на израз са комплементом, добијамо:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2x_3(\bar{x}_1+\bar{x}_4)x_4+\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1x_2x_4$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1x_2x_4$$

Према описаним правилима на вежбама, за представљање нормалних форми помоћу кубова, сада ћемо функцију у облику ДНФ да представимо овако:

f(1) ={XX01, 01X1}={0001, 0101, 1001, 1101, 0101, 0111}={1, 5, 7, 9, 13}

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00				
01	1	1	1	1
11		1		
10				

На крају формирамо минималну ДНФ функције, као суму елементарних производа:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 x_4$$

в) У задатку је дат скуп вектора на којима функција f има вредност нула - f(0), а пошто се тражи минимална ДНФ функције, потребно је да одредимо где функција има вредност један - f(1).

f(0) = {1, 7, 9, 12, 13,14,15}

f(1) ={0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11}

Дакле, функција f има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула. Затим нацртамо Карноову карту за функцију f која зависи од 4 промењљиве и попунимо она поља где функција има вредност један - f(1):

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1		1
01		1		
11	1			1
10	1	1		1

У Карноовој карти налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога за сваку фигуру исписујемо елементарни производ, који одговара свакој од тих фигура:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_2\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_4 + \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$$

г) У задатку је дат скуп вектора на којима функција f има вредност један - f(1) и скуп вектора на којима се функција не јавља, а пошто се тражи минимална КНФ функције, потребно је да одредимо где функција има вредност нула - f(0).

Дакле, функција f има вредност нула на свим векторима, осим оних на којима има вредност један и на којима се функција не јавља. Затим нацртамо Карноову карту за функцију f која зависи од 4 промењљиве и попунимо она поља где функција има вредност нула - f(0) и она поља где се функција не јавља - f(b). Вектори који се никада не јављају у Карноовој карти се обележавају са b и они могу бити врло битни при добијању минималнијег решења. Како нам није важно коју вредност функција има на овим векторима, јер се они никада не јављају, можемо користити ту вредност и као нулу и као јединицу. У овом задатку користићемо b као вредност нула, зато што тражимо минималну КНФ функције:

f(0) ={0, 1, 9, 10, 11, 13}

f(b) = {2, 3, 4, 6, 15}

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	0	b		
01	0		0	0
11	b		b	0
10	b	b		0

Задатак под г) је решен на сличан начин као под в), само што смо сада користили и векторе који се никада не јављају. Ипак, на слици можемо видети да вектори са вредношћу b, који се не јављају (зато што функција није потпуно дефинисана), не морају да буду укључени, већ их користимо само ако нам помажу да добијемо фигуру већег ранга.

Из Карноове карте налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога за сваку фигуру исписујемо елементарну суму, која одговара свакој од тих фигура:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2)(\overline{x}_1 + \overline{x}_4)(x_2 + \overline{x}_3)$$