I колоквијум из Основа рачунарске технике I - надокнада 2009/2010
(15.05.2010.)
Р е ш е њ е

Задатак 1

а) Пошто постоје вектори на којима се функција f не јавља и вектори на којима има вредност нула, лако можемо да утврдимо и векторе на којима функција има вредност један:

f(0) = {0, 2, 5, 9, 10, 12}
f(b) = {3, 6, 13, 15}
f(1) = {1, 4, 7, 8, 11, 14}

Затим нацртамо Карноову карту за функцију f која зависи од 4 променљиве и попунимо поља где функција има вредност један - f(1) и она поља где се функција не јавља - f(b), зато што није потпуно дефинисана.

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00		1		1
01	1		b	
11	b	1	b	1
10		b	1	

У овом задатку, за разлику од стандардних задатака где извршавамо минимизацију, овде не покушавамо да добијемо минималну ДНФ, него тражимо ДНФ која је иста као СДНФ. СДНФ ће бити једнака минималној ДНФ, <u>ако и само ако</u> у Карноовој карти постоје искључиво фигуре ранга 0 (једно поље), зато што у СДНФ облику функције сваки производ мора бити потпуни (тј. свака фигура у Карноовој карти се приказује само једним пољем), а ако би се појавила фигура већег ранга, онда минимална ДНФ не би имала само потпуне производе и самим тим не би више била као СДНФ. Зато испитујемо вредности оних поља где функција није дефинисана - f(b) и закључујемо да на векторима {3, 6, 15} мора бити нула (на слици означено испрекиданом линијом), док вредност на вектору {13} може бити или нула или један (на слици означено пуном линијом). У зависности од тога, имамо 2 решења помоћу Карноове карте, али оба испуњавају услов задатка да је СДНФ = минималној ДНФ:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$
01	$\boxed{1}$		$\boxed{1}$	
11		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$
10			$\boxed{1}$	

ИЛИ

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$
01	$\boxed{1}$			
11		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$
10			$\boxed{1}$	

б) Потребно је наћи скуп вектора на којима важи f(0) = g(0) и f(1) = g(1). Пошто је функција f дата у облику КНФ, а функција g у облику ДНФ, прво ћемо одредити коњуктивни покривач функције f и дисјунктивни покривач функције g. Према описаним правилима на вежбама, за представљање нормалних форми помоћу кубова добијамо:

f(0) ={11X1, 1X0X, XX00}
g(1) ={X1X0, X010, 0X1X}

Потпуним развијањем ових кубова, можемо одредити све векторе на којима функција f има вредност нула, односно све векторе на којима функција g има вредност један:

f(0) ={1101, 1111, 1000, 1001, 1100, 1101, 0000, 0100, 1000, 1100} = {0, 4, 8, 9, 12, 13, 15}
g(1) ={0100, 0110, 1100, 1110, 0010, 1010, 0010, 0011, 0110, 0111}= {2, 3, 4, 6, 7, 10, 12, 14}

Када одредимо f(0) и g(1), морамо да одредимо и f(1) и g(0). Пошто је прекидачка функција f потпуно дефинисана (нема векторе који се не јављају f(b)), она има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула. Аналогно важи и за функцију g, која има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један:

f(1) ={1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 14}
g(0) ={0, 1, 5, 8, 9, 11, 13, 15}

Скуп вектора на којима су функције једнаке је **{0, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15}**.

Задатак 2

а) Применом правила Булове алгебре, морамо да средимо функцију и доведемо је у КНФ облик.

Срећивање почињемо применом Де Моргановe теореме на изразе $(\overline{x_1+x_3+x_4})$ и $(\overline{\bar{x}_2+x_3})$, а затим и на $\overline{(x_1+x_3+\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4)}$:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{(x_1x_4+\bar{x}_2\cdot\overline{(x_1+x_3+\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4)}\cdot(x_1+x_2))}\cdot x_2\bar{x}_3$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{(x_1x_4+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\cdot(x_1+x_3+x_4)\cdot(x_1+x_2))}\cdot x_2\bar{x}_3$$

Затим помножимо $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\cdot(x_1+x_3+x_4)$ и применимо закон о комплементу за променљиве $x_1\bar{x}_1=0$ и $x_3\bar{x}_3=0$, па остане само $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{(x_1x_4+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\cdot(x_1+x_2))}\cdot x_2\bar{x}_3$$

Затим помножимо $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\cdot(x_1+x_2)$ и поновимо применимо закон о комплементу, сада за променљиве $x_1\bar{x}_1=0$ и $x_2\bar{x}_2=0$:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1x_4}\cdot x_2\bar{x}_3$$
$$\boxed{f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2\bar{x}_3(\bar{x}_4+\bar{x}_1)=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+x_2\bar{x}_3\bar{x}_4}$$

На крају добијамо да функција има вредност један, само на једном вектору, а да на свим осталим векторима има вредност нула:

f(1) ={010X, X100}={0100, 0101, 0100, 1100}={4,5,12}
f(0) ={0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15}

Према правилима за одређивање минималне КНФ прекидачке функције, помоћу Карноове карте, за функцију f која има четири променљиве x_1,x_2,x_3, x_4 добијамо:

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	0			0
01	0		0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

У Карноовој карти налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога за сваку фигуру исписујемо елементарну суму, која одговара свакој од тих фигура:

$$\boxed{f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2\bar{x}_3(\bar{x}_1 + \bar{x}_4)}$$

Овде је интересантно напоменути да су x_2 и $\bar{x}_3$ елементарне суме, јер свака од те две суме представља једну фигуру ранга 3 (фигура од 2^3=8 поља).

б) Функција f је дата у облику ДНФ, па ћемо одредити где та функција има вредност један, према правилима за представљање нормалних форми помоћу кубова:

f(1)={XX1, 010, 10X, 11X}={001, 011, 101, 111, 010, 100, 101, 110, 111} = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

Према правилима за одређивање минималне ДНФ прекидачке функције, помоћу Карноове карте, за функцију f која има три променљиве x_1,x_2,x_3, добијамо:

$x_3 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1	1	1

На крају формирамо минималну ДНФ функције, као суму елементарних производа:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$$

в) У задатку је дат скуп вектора на којима функција f има вредност један - f(1)={1,3,4,6,9,11,15}, а пошто се тражи минимална КНФ функције, потребно је да одредимо где функција има вредност нула - f(0). Дакле, функција f има вредност нула на свим векторима, осим оних на којима има вредност један и на којима се функција не јавља - f(b).

f(0) ={0, 2, 7, 13, 14}

f(b) ={5,8,10,12}

Затим нацртамо Карноову карту за функцију f која зависи од 4 променљиве и попунимо она поља где функција има вредност нула - f(0) и она поља где се функција не јавља - f(b). Вектори који се никада не јављају у Карноовој карти се обележавају са b и они могу бити врло битни при добијању минималнијег решења. Како нам није важно коју вредност функција има на овим векторима, јер се они никада не јављају, можемо користити ту вредност и као нулу и као јединицу. У овом задатку користићемо b као вредност нула, зато што тражимо минималну КНФ функције:

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	0		b	b
01		b	0	
11		0		
10	0		0	b

Из Карноове карте налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога за сваку фигуру исписујемо елементарну суму, која одговара свакој од тих фигура:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_4)(\bar{x}_1 + x_4)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3)(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_4)$$

г) У задатку је дат скуп вектора на којима функција f има вредност нула - f(0)={1,3,4,7,11,17,19,20,28,29}, а пошто се тражи минимална ДНФ функције, потребно је да одредимо где функција има вредност један - f(1). Дакле, функција f има вредност један на свим векторима, осим оних на којима има вредност нула и на којима се функција не јавља - f(b).

f(b)={5,9,21,25,27}
f(1) ={0, 2, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 22, 23, 24, 26, 30, 31}

Нацртамо две Карноове карте за функцију f, пошто зависи од 5 промењљивих (ранг 5, 2^5=32 поља) и попунимо она поља где функција има вредност један - f(1) и она поља где се функција не јавља - f(b). Вектори који се никада не јављају у Карноовој карти се обележавају са b и они могу бити врло битни при добијању минималнијег решења. Како нам није важно коју вредност функција има на овим векторима, јер се они никада не јављају, можемо користити ту вредност и као нулу и као јединицу. У овом задатку користићемо b као вредност један, зато што тражимо минималну ДНФ функције:

x_1=0

$x_4x_5 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
00	1		1	1
01		b	1	b
11			1	
10	1	1	1	1

x_1=1

$x_4x_5 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
00	1			1
01		**b**		b
11		1	1	**b**
10	1	1	1	1

Треба напоменути да прва Карноова карта важи када је $x_1=0$, а друга Карноова карта када је $x_1=1$. Остале променљиве x_2,x_3,x_4,x_5 се распоређују као код Карноове карте ранга 4 (са 16 поља). Прво тражимо фигуре што већег ранга на истим местима у обе Карноове карте (и за $x_1=0$ и за $x_1=1$), а затим тражимо фигуре што већег ранга на свакој Карноовој карти појединачно.

Након тога за сваку фигуру исписујемо елементарни производ, који одговара свакој од тих фигура:

$$\boxed{f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bar{x}_1x_2x_3+x_1x_3x_4+\bar{x}_3\bar{x}_5+x_4\bar{x}_5}$$