I колоквијум из Основа рачунарске технике I - 2008/2009
(28.03.2009.)
Р е ш е њ е

Задатак 1

а) Потребно је наћи скуп вектора на којима се функције разликују, односно где важи да је f(0) = g(1) и f(1) = g(0). Пошто је функција f дата у облику ДНФ, а функција g у облику КНФ, прво ћемо одредити дисјунктивни покривач функције f и коњуктивни прекривач функције g. Према описаним правилима на вежбама, за представљање нормалних форми помоћу кубова добијамо:

f(1) ={011X, X101, 110X}
g(0) ={011X, X0X1, 1X00, X0X0}

Потпуним развијањем ових кубова, можемо одредити све векторе на којима функција f има вредност један, односно све векторе на којима функција g има вредност нула:

f(1) ={0110, 0111, 0101, 1101, 1100, 1101} = {5, 6, 7, 12, 13}
g(0) ={0110, 0111, 0001, 0011, 1001, 1011, 1000, 1100, 0000, 0010, 1000, 1010}
= {0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Када одредимо f(1) и g(0), морамо да одредимо и f(0) и g(1). Пошто је прекидачка функција f потпуно дефинисана (нема векторе који се не јављају - f(b)), она има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један. Аналогно важи и за функцију g, која има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула:

f(0) ={0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 14, 15}
g(1) ={4, 5, 13, 14, 15}

Из овога следи да је скуп вектора на којима се функције разликују: **{4, 6, 7, 12, 14, 15}**

б) Применом правила Булове алгебре, морамо да средимо функцију и доведемо је у СКНФ облик. Сређивање почињемо применом Де Морганове теореме на унутрашњи комплемент, у изразу $\overline{((\overline{x_1 + x_2 + \overline{x}_3 \cdot (x_1 + \overline{x}_4)}) + x_2 \cdot x_3)}$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\overline{x}_4 + (\overline{\overline{x}_1\overline{x}_2(x_3 + \overline{x}_1 x_4) + x_2 \cdot x_3}) + \overline{x}_1\overline{x}_2$$

Затим помножимо $\overline{x}_1\overline{x}_2$ са $(x_3 + \overline{x}_1 x_4)$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\overline{x}_4 + (\overline{\overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2 x_4 + x_2 x_3}) + \overline{x}_1\overline{x}_2$$

Поново примењујемо Де Морганову теорему, сада на израз $(\overline{\overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2 x_4 + x_2 x_3})$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\overline{x}_4 + (x_1 + x_2 + \overline{x}_3)(x_1 + x_2 + \overline{x}_4)(\overline{x}_2 + \overline{x}_3) + \overline{x}_1\overline{x}_2$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\overline{x}_4 + (x_1 + x_1 x_2 + x_1\overline{x}_3 + x_2 + x_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_4 + x_2\overline{x}_4 + \overline{x}_3\overline{x}_4)(\overline{x}_2 + \overline{x}_3) + \overline{x}_1\overline{x}_2$$

Даљим сређивањем добијамо:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\overline{x}_4 + (x_1(1 + x_2 + \overline{x}_3 + \overline{x}_4) + x_2(1 + \overline{x}_3 + \overline{x}_4) + \overline{x}_3\overline{x}_4)(\overline{x}_2 + \overline{x}_3) + \overline{x}_1\overline{x}_2$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\overline{x}_4 + (x_1 + x_2 + \overline{x}_3\overline{x}_4)(\overline{x}_2 + \overline{x}_3) + \overline{x}_1\overline{x}_2$$

Када помножимо $(x_1 + x_2 + \overline{x}_3\overline{x}_4)(\overline{x}_2 + \overline{x}_3)$ и применимо закон о комплементу за промењљиву $x_2\overline{x}_2 = 0$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2 + \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_3 + x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2$$

Функција f је сада изражена у облику ДНФ, па ћемо одредити где та функција има вредност један, према правилима за представљање нормалних форми помоћу кубова:

f(1) = {1XX0, 10XX, X000, 1X0X, X10X, XX00, 00XX}=
{1000, 1010, 1100, 1110; 1000, 1001, 1010, 1011; 0000, 1000;
1000, 1001, 1100, 1101; 0100, 0101, 1100, 1101;
0000, 0100, 1000, 1100; 0000, 0001, 0010, 0011}
= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14}

Након тога можемо да одредимо где функција f има вредност нула (пошто је ова прекидачка функција потпуно дефинисана, тамо где нема вредност један, функција има вредност нула) и из тога можемо да добијемо функцију f у СКНФ облику:

f(0) = {6, 7, 15}

$$\boxed{f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+x_4)(x_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4)}$$

Задатак 2

а) Применом правила Булове алгебре, морамо да средимо функцију и доведемо је у КНФ облик.

Сређивање почињемо применом Де Моргανове теореме на изразе $\overline{(x_2+\bar{x}_4)}$ и $\overline{(x_3+x_4)}$:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+\overline{(\bar{x}_2\bar{x}_3x_4+x_1\bar{x}_3\bar{x}_4)})\cdot(x_1+\bar{x}_3x_4)$$

Затим Де Морганову теорему применимо и на израз $\overline{(\bar{x}_2\bar{x}_3x_4+x_1\bar{x}_3\bar{x}_4)}$:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+(x_2+x_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+x_3+x_4))\cdot(x_1+\bar{x}_3x_4)$$

Множењем ове две заграде $(x_2+x_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+x_3+x_4)$ и применом закона о комплементу за променљиву $x_4\bar{x}_4=0$ добијамо:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+\bar{x}_1x_2+\bar{x}_1x_3+\bar{x}_1\bar{x}_4+x_2x_3+x_3+x_3\bar{x}_4+x_2x_4+x_3x_4)\cdot(x_1+\bar{x}_3x_4)$$

Даљим сређивањем применом правила Булове алгебре добијамо:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+\bar{x}_1x_2+\bar{x}_1\bar{x}_4+x_3(\bar{x}_1+x_2+1+\bar{x}_4+x_4)+x_2x_4)\cdot(x_1+\bar{x}_3x_4)$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+\bar{x}_1x_2+\bar{x}_1\bar{x}_4+x_3+x_2x_4)\cdot(x_1+\bar{x}_3x_4)$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+x_1x_3+x_1x_2x_4+x_1\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4+x_2\bar{x}_3x_4$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1(1+x_3+x_2x_4+\bar{x}_3x_4)+x_2\bar{x}_3x_4(\bar{x}_1+1)$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+x_2\bar{x}_3x_4$$

Функција f је сада изражена у облику ДНФ, па ћемо одредити где та функција има вредност један, према правилима за представљање нормалних форми помоћу кубова:

f(1) ={1XXX, X101}={1000, 1001,1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 0101, 1101}
={5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}

Након тога можемо да одредимо где функција f има вредност нула (пошто је ова прекидачка функција потпуно дефинисана, тамо где нема вредност један, функција има вредност нула) и из тога можемо да добијемо функцију f у КНФ облику:

f(0) ={0, 1, 2, 3, 4, 6, 7}

Према правилима за одређивање минималне КНФ прекидачке функције, помоћу Карноове карте, за функцију f која има четири променљиве x_1,x_2,x_3,x_4 добијамо:

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	0	0		
01	0			
11	0	0		
10	0	0		

У Карноовој карти налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога за сваку фигуру исписујемо елементарну суму, која одговара свакој од тих фигура:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2)(x_1+\bar{x}_3)(x_1+x_4)$$

б) Функција f је дата у облику КНФ, па ћемо одредити где та функција има вредност нула, према правилима за представљање нормалних форми помоћу кубова:

f(0) = {0X0, X11, 100}={000, 010, 011, 111, 100}={0, 2, 3, 4, 7}

Након тога можемо да одредимо где функција f има вредност један:

f(1) = {1, 5, 6}

Према правилима за одређивање минималне ДНФ прекидачке функције, помоћу Карноове карте, за функцију f која има три променљиве x_1,x_2,x_3, добијамо:

$x_3 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
0			**1**	
1	**1**			**1**

На крају формирамо минималну ДНФ функције, као суму елементарних производа:

$$\boxed{f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_2x_3+x_1x_2\bar{x}_3}$$

в) У задатку је дат скуп вектора на којима функција f има вредност нула и тај скуп користимо за представљање КНФ функције. Како у задатку није речено да постоје вектори на којима се функција не јавља, следи да је ова прекидачка функција потпуно дефинисана:

f(0) = {1, 3, 8, 10, 13}

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00				0
01	0		0	
11	0			
10				0

Из Карноове карте налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога за сваку фигуру исписујемо елементарну суму, која одговара свакој од тих фигура:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + \overline{x}_4)(\overline{x}_1 + x_2 + x_4)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3 + \overline{x}_4)$$

г) У задатку је дат скуп вектора на којима функција f има вредност један - f(1)={1,2,6,12,13 }, а пошто се тражи минимална ДНФ функције, то нам је и потребно. Такође, у задатку је дато и где се функција не јавља - f(b), што такође можемо да користимо да бисмо добили минималну ДНФ.

f(1) = {1, 2, 6, 12, 13}
f(b) = {4, 5, 8, 15}

Вектори који се никада не јављају у Карноовој карти се обележавају са b и они могу бити врло битни при добијању минималнијег решења. Како нам није важно коју вредност функција има на овим векторима, јер се они никада не јављају, можемо користити ту вредност и као нулу и као јединицу. У овом задатку користићемо b као вредност један, зато што тражимо минималну ДНФ функције:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00		b	1	b
01	1	b	1	
11			b	
10	1	1		

Из Карноове карте налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога за сваку фигуру исписујемо елементарни производ, који одговара свакој од тих фигура:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1x_3\overline{x}_4$$