I колоквијум из Основа рачунарске технике I - надокнада - 2008/2009

(16.05.2009.)

Р е ш е њ е

Задатак 1

а) Пошто постоје вектори на којима се функција f не јавља и вектори на којима има вредност један, лако можемо да утврдимо и векторе на којима функција има вредност нула:

f(1) = {0, 2, 5, 9, 10, 12, 15}
f(b) = {3, 6, 13}
f(0) = {1, 4, 7, 8, 11, 14}

Затим нацртамо Карноову карту за функцију f која зависи од 4 променљиве и попунимо поља где функција има вредност нула - f(0) и она поља где се функција не јавља - f(b).

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00		0		0
01	0		b	
11	b	0		0
10		b	0	

У овом задатку, за разлику од стандардних задатака где извршавамо минимизацију, овде не покушавамо да добијемо минималну КНФ, него тражимо КНФ која је иста као СКНФ. СКНФ ће бити једнака минималној КНФ, ако и само ако у Карноовој карти постоје искључиво фигуре ранга 0 (једно поље), зато што у СКНФ облику функције свака сума мора бити потпуна (тј. свака фигура у Карноовој карти се приказује само једним пољем), а ако би се појавила фигура већег ранга, онда минимална КНФ не би имала само потпуне суме и самим тим не би више била као СКНФ. Зато испитујемо вредности оних поља где се функција не јавља - f(b) и закључујемо да на векторима {3, 6} мора бити један (на слици означено испрекиданом линијом), док вредност на вектору {13} може бити или нула или један (на слици означено пуном линијом). У зависности од тога, имамо 2 решења помоћу Карноове карте, али оба испуњавају услов задатка да је СКНФ = минималној КНФ:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00		$\boxed{0}$		$\boxed{0}$
01	$\boxed{0}$		$\boxed{0}$	
11		$\boxed{0}$		$\boxed{0}$
10			$\boxed{0}$	

ИЛИ

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00		$\boxed{0}$		$\boxed{0}$
01	$\boxed{0}$			
11		$\boxed{0}$		$\boxed{0}$
10			$\boxed{0}$	

б) Потребно је наћи скуп вектора на којима важи f(0) = g(0) и f(1) = g(1). Пошто је функција f дата у облику КНФ, а функција g у облику ДНФ, прво ћемо одредити коњуктивни покривач функције f и дисјунктивни покривач функције g. Према описаним правилима на вежбама, за представљање нормалних форми помоћу кубова добијамо:

f(0) ={001X, 1X0X, XX00}
g(1) ={XX00, 001X, 1X0X}

Потпуним развијањем ових кубова, можемо одредити све векторе на којима функција f има вредност нула, односно све векторе на којима функција g има вредност један:

f(0) ={0010, 0011, 1000, 1001, 1100, 1101, 0000, 0100, 1000, 1100} = {0, 2, 3, 4, 8, 9, 12, 13}
g(1) ={0000, 0100, 1000, 1100, 0010, 0011, 1000, 1001, 1100, 1101} = {0, 2, 3, 4, 8, 9, 12, 13}

Када одредимо f(0) и g(1), морамо да одредимо и f(1) и g(0). Пошто је прекидачка функција f потпуно дефинисана (нема векторе који се не јављају f(b)), она има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула. Аналогно важи и за функцију g, која има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један:

f(1) ={1, 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15}
g(0) ={1, 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15}

Упоређивањем закључујемо да функције f и g, нису једнаке ни на једном вектору.

Задатак 2

a) $$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{(x_1+\overline{x}_2\cdot\overline{x}_3\cdot\overline{(x_1+\overline{(x_3+x_4)})}\cdot(x_2+x_3))}\cdot(x_1+x_2+x_4)$$

Применом правила Булове алгебре, морамо да средимо функцију и доведемо је у КНФ облик.

Сређивање почињемо применом Де Моргановe теореме прво на израз $\overline{(x_3+x_4)}$, а у следећем кораку на израз $\overline{(x_1+\overline{x}_3\overline{x}_4)}$:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{(x_1+\overline{x}_2\cdot\overline{x}_3\cdot\overline{(x_1+\overline{x}_3\overline{x}_4)}\cdot(x_2+x_3))}\cdot(x_1+x_2+x_4)$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{(x_1+\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3(x_3+x_4)\cdot(x_2+x_3))}\cdot(x_1+x_2+x_4)$$

Затим множењем $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3(x_3+x_4)$ добијамо $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_3+\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$, па се први сабирак скрати због закона о комплементу $x_3\overline{x}_3$=0:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{(x_1+\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4\cdot(x_2+x_3))}\cdot(x_1+x_2+x_4)$$

Даљим множењем и применом закона о комплементу $\overline{x}_1x_2\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 = 0$ (због $x_2\overline{x}_2$) и $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_3x_4 = 0$ (због $x_3\overline{x}_3$) добијамо:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x}_1\cdot(x_1+x_2+x_4)$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x}_1x_2+\overline{x}_1x_4$$

Добили смо ДНФ облик функције, тако да ћемо помоћу кубова прво наћи где функција f има вредност 1, потпуним развијањем добијених кубова:

f(1) ={01XX, 0XX1}={0100, 0101, 0110, 0111, 0001, 0011, 0101, 0111}={1, 3, 4, 5, 6, 7}

Сада можемо наћи и где функција има вредност нула:

f(0) ={0, 2, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}

Према правилима за одређивање минималне КНФ прекидачке функције, помоћу Карноове карте, за функцију f која има четири променљиве x_1,x_2,x_3, x_4 добијамо:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0		0	0
01			0	0
11			0	0
10	0		0	0

У Карноовој карти налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога за сваку фигуру исписујемо елементарну суму, која одговара свакој од тих фигурама:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1(x_2 + x_4)$$

б) Функција f је дата у облику ДНФ, па ћемо одредити где та функција има вредност један, према правилима за представљање нормалних форми помоћу кубова:

f(1)={XX1, 010, 10X, 11X}={001, 011, 101, 111, 010, 100, 101, 110, 111} = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

Према правилима за одређивање минималне ДНФ прекидачке функције, помоћу Карноове карте, за функцију f која има три променљиве x_1,x_2,x_3, добијамо:

x_3 \ x_1x_2	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1	1	1

На крају формирамо минималну ДНФ функције, као суму елементарних производа:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$$

в) У задатку је дат скуп вектора на којима функција f има вредност један - f(1)={1,3,4,5,6,9,12,13,14,16,17,20,21,22,23,28,29}, а пошто се тражи минимална КНФ функције, потребно је да одредимо где функција има вредност нула - f(0). Дакле, функција f има вредност нула на свим векторима, осим оних на којима има вредност један:

f(1) ={1,3,4,5,6,9,12,13,14,16,17,20,21,22,23,28,29}
f(0) ={0, 2, 7, 8, 10, 11, 15, 18, 19, 24, 25, 26, 27, 30, 31}

Функција је дефинисана на свим векторима, тако да може имати само вредност 0 или вредност 1. Нацртамо две Карноове карте за функцију f, пошто зависи од 5 промењљивих (ранг 5, 2^5=32 поља) и попунимо она поља где функција има вредност нула - f(0):

x_1=0

x_4x_5 \ x_2x_3	00	01	11	10
00	0			0
01				
11		0	0	0
10	0			0

x_1=1

x_4x_5 \ x_2x_3	00	01	11	10
00				0
01				0
11	0		0	0
10	0		0	0

Треба напоменути да прва Карноова карта важи када је x_1=0, а друга Карноова карта када је x_1=1. Остале промењљиве x_2,x_3,x_4,x_5 се распоређују као код Карноове карте ранга 4 (са 16 поља). Прво тражимо фигуре што је могуће већег ранга на истим местима у обе Карноове карте (и за x_1=0 и за x_1=1), а затим тражимо фигуре што је могуће већег ранга на свакој Карноовој карти појединачно.

Након тога за све заокружене фигуре исписујемо производ елементарних сума, који представља минималну вредност КНФ функције:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3 + x_5)(x_1 + \overline{x}_3 + \overline{x}_4 + \overline{x}_5)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_4)(\overline{x}_1 + x_3 + \overline{x}_4)(\overline{x}_2 + x_3 + \overline{x}_4)$$

г) У задатку је дат скуп вектора на којима функција f има вредност нула - f(0)={0,10,13,14} и скуп вектора на којима се функција f не јавља - f(b)={1,3,5,15}, а пошто се тражи минимална ДНФ функције, потребно је да одредимо где функција има вредност један - f(1). Функција f има вредност један на свим векторима, осим оних на којима има вредност нула и оних вектора на којима се функција не јавља - f(b):

f(1) ={2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12}

Затим нацртамо Карноову карту за функцију f која зависи од 4 промењљиве и попунимо она поља где функција има вредност један - f(1) и она поља где се функција не јавља - f(b). Вектори који се никада не јављају у Карноовој карти се обележавају са b и они могу бити врло битни при добијању минималнијег решења. Како нам није важно коју вредност функција има на овим векторима, јер се они никада не јављају, можемо користити ту вредност и као нулу и као јединицу. У овом задатку користићемо b као вредност један, зато што тражимо минималну ДНФ функције:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00		1	1	1
01	b	b		1
11	b	1	b	1
10	1	1		

Из Карноове карте налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога за сваку фигуру исписујемо елементарни производ, која одговара свакој од тих фигура:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1 x_2 + \overline{x}_1 x_3 + \overline{x}_2 x_4 + x_1 \overline{x}_3 \overline{x}_4$$