I колоквијум из Основа рачунарске технике I [СИ] - 2007/2008
(05.04.2008.)
Р е ш е њ е

Задатак 1

а) Функције су једнаке на оним векторима где имају исте вредности, односно где важи да је f(0) = g(0) и f(1) = g(1). Да бисмо то урадили, можемо за сваку функцију да одредимо вредности на свим векторима, а затим да их упоредимо. Како је функција $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ дата у облику КНФ, лакше је одредити коњуктивни покривач ове функције, а како је функција $g(x_1,x_2,x_3,x_4)$ дата у облику ДНФ, лакше је одредити дисјунктивни покривач ове функције. Према описаним правилима на вежбама, за представљање нормалних форми помоћу кубова добијамо:

f(0) ={010X, X00X, 1X1X, X0X1}
g(1) ={0X0X, X00X, 0XX1, 1X1X}

Потпуним развијањем ових кубова, можемо одредити све векторе на којима функција f има вредност нула, односно све векторе на којима функција g има вредност један:

f(0) ={0100, 0101, 0000, 0001, 1000, 1001, 1010, 1011, 1110, 1111, 0001, 0011, 1001, 1011}
= {0, 1, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 14, 15}

g(1) ={0000, 0001, 0100, 0101, 0000, 0001, 1000, 1001, 0001, 0011, 0101, 0111, 1010, 1011,
1110, 1111} = {0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15}

Када одредимо f(0) и g(1), морамо да одредимо и f(1) и g(0). Пошто се ради о потпуно дефинисаној прекидачкој функцији, функција f има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула. Аналогно важи и за функцију g, која има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један:

f(1) ={2, 6, 7, 12, 13}
g(0) ={2, 6, 12, 13}

Упоређивањем добијених скупова, налазимо пресек скупова да утврдимо векторе на којима су функције исте, односно где важи f(0) = g(0) и f(1) = g(1). Тај скуп је **{7}**, односно само на једном вектору су функције исте.

б) Сређивање почињемо применом Де Морганове теореме на изразе $\overline{(x_1+x_3)}$ и $\overline{(x_1+x_3)}$:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_3+\bar{x}_4)\cdot\overline{(x_1+x_2+\bar{x}_1\bar{x}_3x_4\cdot(\bar{x}_1+x_4))}\cdot\bar{x}_1\bar{x}_3$$

Сада помножимо $\bar{x}_1\bar{x}_3x_4\cdot(\bar{x}_1+x_4)$, па добијамо:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_3+\bar{x}_4)\cdot\overline{(x_1+x_2+\bar{x}_1\bar{x}_3x_4)}\cdot\bar{x}_1\bar{x}_3$$

Применом Де Морганове теореме на израз $\overline{(x_1+x_2+\bar{x}_1\bar{x}_3x_4)}$ добијамо:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_3+\bar{x}_4)\bar{x}_1\bar{x}_2(x_1+x_3+\bar{x}_4)\bar{x}_1\bar{x}_3$$

Након тога, помножимо $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3(x_1+x_3+\bar{x}_4)$ па ћемо применом закона о комплементу $x_1\bar{x}_1=0$ и $x_3\bar{x}_3=0$ добити:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4(x_1+x_3+\bar{x}_4)$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$$

Како је функција f дата у облику СДНФ, лако можемо да одредимо где функција има вредност 1, па тек након тога да одредимо где функција има вредност 0, односно да одредимо коњуктивни покривач:

f(1)={0000}={0}
f(0)={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}

Задатак 2

а) Прво морамо применом правила Булове алгебре да средимо функцију и доведемо је у КНФ облик. Срећивање почињемо применом Де Моргановe теореме на израз $\overline{(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}$:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2\cdot\overline{(x_1+x_2+x_1x_2\cdot(x_3+x_4))})\cdot(x_1+\bar{x}_3)$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2\cdot\overline{(x_1+x_2+x_1x_2x_3+x_1x_2x_4)})\cdot(x_1+\bar{x}_3)$$

Сада применимо Де Морганову теорему на израз $\overline{(x_1+x_2+x_1x_2x_3+x_1x_2x_4)}$:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2\bar{x}_1\bar{x}_2\,\overline{x_1x_2x_3}\,\overline{x_1x_2x_4})\cdot(x_1+\bar{x}_3)$$

Применом закона о комплементу $x_2\bar{x}_2=0$, у првој загради остаје само x_1:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1\cdot(x_1+\bar{x}_3)$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+x_1\bar{x}_3$$

Функција f је дата у облику ДНФ, па ћемо одредити где та функција има вредност један, према правилима за представљање нормалних форми помоћу кубова:

f(1) ={1XXX, 1X0X}={1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 1000, 1001, 1100, 1101}
={8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}

Сада је потребно одредити f(0), а пошто је ова прекидачка функција потпуно дефинисана (нема f(b)), функција f има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један:

f(0) ={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

Према правилима за одређивање минималне КНФ прекидачке функције, помоћу Карноове карте, за функцију f која има четири промењиве x_1,x_2,x_3,x_4 добијамо:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0	0		
01	0	0		
11	0	0		
10	0	0		

На крају формирамо минималну КНФ функције, као производ елементарних сума, али у овом задатку имамо само једну суму, која је представљена помоћу једне променљиве (зато што је у питању једна фигура ранга 3; 2^3=8 поља):

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1$$

б) Функција f је дата у облику КНФ, па ћемо одредити где та функција има вредност нула, према правилима за представљање нормалних форми помоћу кубова:

f(0) = {11X, X11, 001} = {110, 111, 011, 111, 001} = {1, 3, 6, 7}

Сада је потребно одредити f(1), а пошто је ова прекидачка функција потпуно дефинисана (нема f(b)), функција f има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула:

f(1)={0, 2, 4, 5}

Према правилима за одређивање минималне ДНФ прекидачке функције, помоћу Карноове карте, за функцију f која има три променљиве x_1,x_2,x_3, добијамо:

$x_3 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
0	1	1		1
1				1

На крају формирамо минималну ДНФ функције, као суму елементарних производа:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2$$

в) У задатку је дат скуп вектора на којима функција f има вредност један - f(1) ={4, 6, 8, 10, 13}, а пошто се тражи минимална КНФ функције, потребно је да одредимо где функција има вредност нула - f(0):

f(0) ={0, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 14, 15}

Дакле, функција f има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један. Затим нацртамо Карноову карту за функцију f која зависи од 4 променљиве и попунимо она поља где функција има вредност нула - f(0):

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	0		0	
01	0	0		0
11	0	0	0	0
10	0		0	

У Карноовој карти налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога исписујемо производ елементарних сума, тако да свака сума одговара по једној од тих фигура:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2)(x_1 + \overline{x}_4)(x_2 + \overline{x}_4)(\overline{x}_3 + \overline{x}_4)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_4)$$

г) У задатку је дат скуп вектора на којима функција f има вредност нула - f(0) и скуп вектора на којима се функција не јавља f(b) ={2, 3, 4, 5, 10, 11, 12}, а пошто се тражи минимална ДНФ функције, потребно је да одредимо где функција има вредност један - f(1):

f(1) ={0, 1, 7, 8, 14}

Дакле, функција f има вредност један на свим векторима, осим оних на којима има вредност нула и на којима се функција не јавља. Затим нацртамо Карноову карту за функцију f која зависи од 4 променљиве и попунимо она поља где функција има вредност један - f(1) и она поља где се функција не јавља - f(b). Вектори који се никада не јављају у Карноовој карти се обележавају са b и они могу бити врло битни при добијању минималнијег решења. Како нам није важно коју вредност функција има на овим векторима, јер се они никада не јављају, можемо користити ту вредност и као нулу и као јединицу. У овом задатку користићемо b као вредност један, зато што тражимо минималну КНФ функције:

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	1	b	b	1
01	1	b		
11	b	1		b
10	b		1	b

На слици можемо видети да вектори са вредношћу b, који се не јављају, не морају да буду укључени, већ их користимо само ако нам помажу да добијемо фигуру већег ранга.

Из Карноове карте налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога исписујемо суму елементарних производа, тако да сваки производ одговара једној заокруженој фигури у Карноовој карти:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1 x_4 + x_1\overline{x}_4$$