I колоквијум из Основа рачунарске технике I - 2007/2008
(13.04.2008.)
Р е ш е њ е

Задатак 1

а) Функције се разликују на оним векторима где имају различите вредности, односно где важи да је f(0)=g(1) и f(1)=g(0). Да бисмо то урадили, можемо за сваку функцију да одредимо вредности на свим векторима, а затим да их упоредимо. Како је функција $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ дата у облику ДНФ, лакше је одредити дисјунктивни покривач ове функције, а како је функција $g(x_1,x_2,x_3,x_4)$ дата у облику КНФ, лакше је одредити коњуктивни покривач ове функције. Према описаним правилима на вежбама, за представљање нормалних форми помоћу кубова добијамо:

f(1) ={0X01, 010X, X111, 10XX, 1XX0}
g(0) ={11X1, X000, 0X10}

Потпуним развијањем ових кубова, можемо одредити све векторе на којима функција f има вредност један, односно све векторе на којима функција g има вредност нула:

f(1) ={0001, 0101, 0100, 0101, 0111, 1111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1000, 1010, 1100, 1110}
= {1, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15}
g(0) ={1101, 1111, 0000, 1000, 0010, 0110} = {0, 2, 6, 8, 13, 15}

Када одредимо f(1) и g(0), морамо да одредимо и f(0) и g(1). Пошто се ради о потпуно дефинисаној прекидачкој функцији, функција f има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један. Аналогно важи и за функцију g, која има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула:

f(0) ={0, 2, 3, 6, 13}
g(1) ={1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 14}

Скуп вектора на којима се функције разликују: {3, 8, 15}

б) Сређивање почињемо применом Де Морганове теореме на израз $\overline{(x_2 + x_3 \cdot x_4)}$:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + \bar{x}_2\bar{x}_3)\cdot \bar{x}_2(\bar{x}_3 + \bar{x}_4) + \bar{x}_3 + x_2$$

Даљим множењем добијамо:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + \bar{x}_2\bar{x}_3)\cdot (\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_2\bar{x}_4) + \bar{x}_3 + x_2$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 + \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_3 + x_2$$

За први, други и четврти сабирак извлачимо заједнички члан $\bar{x}_2\bar{x}_3$:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_2\bar{x}_3(x_1 + 1 + \bar{x}_4) + x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 + \bar{x}_3 + x_2$$

и применом правила Булове алгебре $x_1 + 1 + \bar{x}_4 = 1$ добијамо:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 + \bar{x}_3 + x_2$$

Даљим сређивањем израза добијамо:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 + \bar{x}_3(\bar{x}_2 + 1) + x_2$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 + \bar{x}_3 + x_2$$

Како је функција f дата у облику ДНФ, лакше је одредити дисјунктивни покривач ове функције, па тек након тога одредити СКНФ. Према описаним правилима на вежбама, за представљање нормалних форми помоћу кубова добијамо:

f(1)={10X0, XX0X, X1XX}={1000, 1010, 0000, 0001, 0100, 0101, 1000, 1001, 1100, 1101,
0100, 0101, 0110, 0111, 1100, 1101, 1110, 1111}={0,1,4,5,6,7,8,9,10,12,13,14,15}

Сада је потребно одредити f(0), а пошто је ова прекидачка функција потпуно дефинисана (нема f(b)), функција f има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један:

f(0)={2, 3, 11}

На крају добијамо СКНФ функције:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + \overline{x}_3 + x_4)(x_1 + x_2 + \overline{x}_3 + \overline{x}_4)(\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3 + \overline{x}_4)$$

Задатак 2

а) На самом почетку, применом правила Булове алгебре, морамо да средимо функцију и доведемо је у КНФ облик. Сређивање почињемо применом Де Морганове теореме на израз $\overline{(x_2 + x_3 \cdot \overline{x}_4)}$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + \overline{x}_3) \cdot \overline{(\overline{x}_1 + \overline{x}_4 \overline{x}_2 (\overline{x}_3 + x_4))}$$

Даљим сређивањем, применом закона о комплементу на $x_4 \overline{x_4} = 0$:

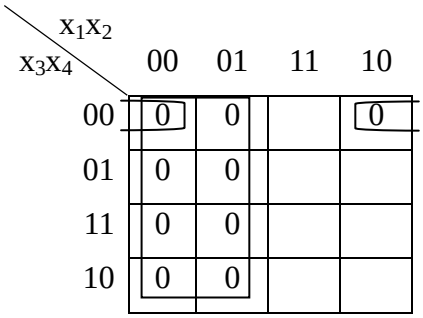
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + \overline{x}_3) \cdot \overline{(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4)}$$

Опет применимо Де Морганову теорему, па добијамо:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + \overline{x}_3) \cdot (x_1) \cdot (x_2 + x_3 + x_4)$$

Према описаним правилима на вежбама, за представљање нормалних форми помоћу кубова, сада ћемо функцију у облику КНФ да представимо овако:

f(0) ={001X, 0XXX, X000}={0010, 0011, 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 0000, 1000}
={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}



На крају формирамо минималну КНФ функције, као производ елементарних сума (при чему свака сума одговара једној заокруженој фигури):

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(x_2 + x_3 + x_4)$$

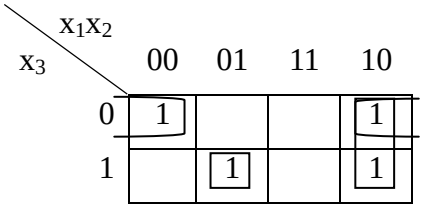
б) Функција f је дата у облику КНФ, па ћемо одредити где та функција има вредност нула, према правилима за представљање нормалних форми помоћу кубова:

f(0) = {X10, 11X, 001} = {010, 110, 110, 111, 001} = {1, 2, 6, 7}

Сада је потребно одредити f(1), а пошто је ова прекидачка функција потпуно дефинисана (нема f(b)), функција f има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула:

f(1)={0, 3, 4, 5}

Према правилима за одређивање минималне ДНФ прекидачке функције, помоћу Карноове карте, за функцију f која има три променљиве x_1,x_2,x_3, добијамо:



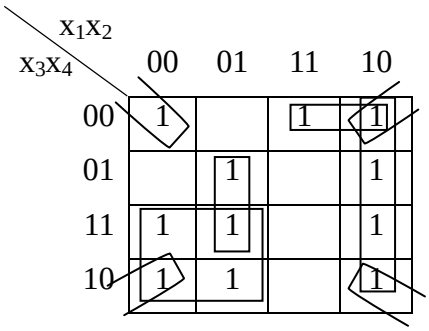
На крају формирамо минималну ДНФ функције, као суму елементарних производа:

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1x_2x_3$

в) У задатку је дат скуп вектора на којима функција f има вредност нула - f(0) = {1,4,13,14,15}, а пошто се тражи минимална ДНФ функције, потребно је да одредимо где функција има вредност један - f(1):

f(1) ={0, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Дакле, функција f има вредност један на свим векторима на којима нема вредност нула. Затим нацртамо Карноову карту за функцију f која зависи од 4 променљиве и попунимо она поља где функција има вредност један - f(1):



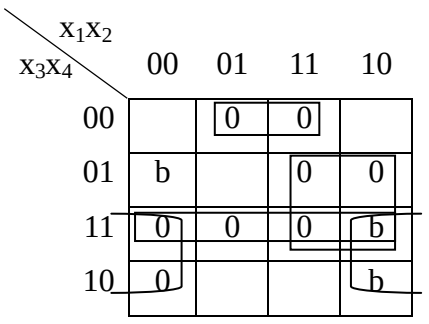
У Карноовој карти налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога исписујемо суму елементарних производа:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_2\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1x_3 + x_1\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2x_4$

г) У задатку је дат скуп вектора на којима функција f има вредност један - f(1)= {0,5,6,8,14} и скуп вектора на којима се функција не јавља f(b) ={1,10,11}, а пошто се тражи минимална КНФ функције, потребно је да одредимо где функција има вредност нула - f(0):

f(0) ={2, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 15}

Дакле, функција f има вредност нула на свим векторима, осим оних на којима има вредност један и на којима се функција не јавља. Затим нацртамо Карноову карту за функцију f која зависи од 4 променљиве и попунимо она поља где функција има вредност нула - f(0) и она поља где се функција не јавља - f(b). Вектори који се никада не јављају у Карноовој карти се обележавају са b и они могу бити врло битни при добијању минималнијег решења. Како нам није важно коју вредност функција има на овим векторима, јер се они никада не јављају, можемо користити ту вредност и као нулу и као јединицу. У овом задатку користићемо b као вредност нула, зато што тражимо минималну КНФ функције:



Задатак под г) је решен на сличан начин као под в), само што смо сада користили и векторе који се никада не јављају. Ипак, на слици можемо видети да вектори са вредношћу b, који се не јављају, не морају да буду укључени, већ их користимо само ако нам помажу да добијемо фигуру већег ранга.

Из Карноове карте налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога за сваку фигуру исписујемо елементарну суму, која одговара свакој од тих фигура:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x}_1 + \overline{x}_4)(x_2 + \overline{x}_3)(\overline{x}_3 + \overline{x}_4)(\overline{x}_2 + x_3 + x_4)$$