I колоквијум из Основа рачунарске технике I - 2007/2008

(01.06.2008.)

Р е ш е њ е

Задатак 1

а) Пошто функција f није потпуно дефинисана, постоје вектори на којима се функција f не јавља f(b)={2,6,7} и вектори на којима има вредност један f(1)={1,3,4,8,9,10,12,13,15}, лако можемо да утврдимо и векторе на којима функција има вредност нула:

f(0) = {0,5,11,14}

Затим нацртамо Карноову карту за функцију f која зависи од 4 променљиве и попунимо поља где функција има вредност нула - f(0) и она поља где се функција не јавља - f(b).

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0			
01		0		
11		b		0
10	b	b	0	

У овом задатку, за разлику од стандардних задатака где извршавамо минимизацију, овде не покушавамо да добијемо минималну КНФ, него тражимо КНФ која је иста као СКНФ. СКНФ ће бити једнака минималној КНФ, <u>ако и само ако</u> у Карноовој карти постоје искључиво фигуре ранга 0 (једно поље), зато што у СКНФ облику функције свака сума мора бити потпуна (тј. свака фигура у Карноовој карти се приказује само једним пољем), а ако би се појавила фигура већег ранга, онда минимална КНФ не би имала само потпуне суме и самим тим не би више била као СКНФ. Зато испитујемо вредности оних поља где се функција не јавља - f(b) и закључујемо да на свим векторима из скупа {2, 6, 7} мора бити један (на слици означено испрекиданом линијом), па је само у том случају услов задатка СКНФ=минималној КНФ испуњен:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	$\boxed{0}$			
01		$\boxed{0}$		
11				$\boxed{0}$
10			$\boxed{0}$	

б) Прво ћемо применом правила Булове алгебре да средимо функцију и доведемо је у КНФ облик, како бисмо утврдили скуп вектора на <u>којима прекидачка функција</u> $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ има вредност 0. Применићемо Де Морганову теорему на израз $\overline{(x_1 + \overline{x}_2 \cdot x_3 \cdot \overline{(x_2 + x_1 \cdot \overline{x}_4)})}$:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{(\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 + x_3 \cdot \overline{x}_4 \cdot \overline{(x_1 + \overline{x}_2 x_3 (\overline{x}_1 + x_4))})}$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{(\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 + x_3 \cdot \overline{x}_4 \cdot \overline{(x_1 + \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 + \overline{x}_2 x_3 x_4)})}$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{(\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_1 x_3 \overline{x}_4 (x_1 + x_2 + \overline{x}_3)(x_2 + \overline{x}_3 + \overline{x}_4))}$$

Затим помножимо $\overline{x}_1x_3\overline{x}_4(x_1+x_2+\overline{x}_3)$, па ће нам се због закона о комплементу $x_1\overline{x}_1=0$ и $x_3\overline{x}_3=0$ скратити део израза:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{(\overline{x}_1\cdot\overline{x}_2+\overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4(x_2+\overline{x}_3+\overline{x}_4))}$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{(\overline{x}_1\overline{x}_2+\overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4)}$$

Даљим сређивањем применом Де Моргановe теореме добијамо КНФ облик функције:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2)(x_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3+x_4)$$

Како је функција f сада у облику КНФ, лако можемо да одредимо где функција има вредност нула:

f(0)={00XX, 0110}={0000, 0001, 0010, 0011, 0110}={0, 1, 2, 3, 6}

Задатак 2

а) Прво морамо применом правила Булове алгебре да средимо функцију и доведемо је у КНФ облик. Сређивање почињемо применом Де Моргановe теореме на израз $\overline{(x_1+\overline{x}_2\cdot\overline{x}_3\cdot\overline{x}_4)}$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+\overline{x}_2\overline{x}_3+\overline{x}_1x_4(x_2+x_3+x_4)\cdot(x_3+\overline{x}_1\cdot\overline{x}_2)$$

Даљим множењем добијамо:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+\overline{x}_2\overline{x}_3+(\overline{x}_1x_2x_4+\overline{x}_1x_3x_4+\overline{x}_1x_4)\cdot(x_3+\overline{x}_1\overline{x}_2)$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+\overline{x}_2\overline{x}_3+\overline{x}_1x_2x_3x_4+\overline{x}_1x_3x_4+\overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4+\overline{x}_1\overline{x}_2x_4$$

Затим нађемо заједничке промењљиве за трећи и четврти, и пети и шести сабирак и извучемо испред заграде:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+\overline{x}_2\overline{x}_3+\overline{x}_1x_3x_4(x_2+1)+\overline{x}_1\overline{x}_2x_4(x_3+1)$$
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+\overline{x}_2\overline{x}_3+\overline{x}_1x_3x_4+\overline{x}_1\overline{x}_2x_4$$

Функција f је дата у облику ДНФ, па ћемо одредити где та функција има вредност један, према правилима за представљање нормалних форми помоћу кубова:

f(1) ={1XXX, X00X, 0X11, 00X1}={1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 0000, 0001, 1000, 1001, 0011, 0111, 0001, 0011}={0, 1, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}

Сада је потребно одредити f(0), а пошто је ова прекидачка функција потпуно дефинисана (нема f(b)), функција f има вредност нула на свим векторима на којима нема вредност један:

f(0) ={2, 4, 5, 6}

Према правилима за одређивање минималне КНФ прекидачке функције, помоћу Карноове карте, за функцију f која има четири промењљиве x_1,x_2,x_3,x_4 добијамо:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00		0		
01		0		
11				
10	0	0		

На крају формирамо минималну КНФ функције, као производ елементарних сума, али у овом задатку имамо само једну суму, која је представљена помоћу једне промењљиве (зато што је у питању једна фигура ранга 3; 2^3=8 поља) :

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+\overline{x}_2+x_3)(x_1+\overline{x}_3+x_4)$$

б) Функција f је дата у облику ДНФ, па ћемо одмах одредити где та функција има вредност један, према правилима за представљање нормалних форми помоћу кубова:

f(1)={010, X11, 1X0, 100, 1X1}={010, 011, 111, 100, 110, 100, 101, 111} = {2, 3, 4, 5, 6, 7}

Према правилима за одређивање минималне ДНФ прекидачке функције, помоћу Карноове карте, за функцију f која има три промењљиве x_1,x_2,x_3, добијамо:

x_3 \ x_1x_2	00	01	11	10
0		1	1	1
1		1	1	1

На крају формирамо минималну ДНФ функције, као суму елементарних производа:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$$

в) У задатку је дат скуп вектора на којима функција f има вредност један - f(1)={3,4,6,7,11,12,14,16,17,18,19,20,21,23,27,28,30}, а пошто се тражи минимална КНФ функције, потребно је да одредимо где функција има вредност нула - f(0). Дакле, функција f има вредност нула на свим векторима, осим оних на којима има вредност један:

f(0) ={0, 1, 2, 5, 8, 9, 10, 13, 15, 22, 24, 25, 26, 29, 31}

Функција је дефинисана на свим векторима, тако да може имати само вредност 0 или вредност 1. Нацртамо две Карноове карте за функцију f, пошто зависи од 5 промењљивих (ранг 5, 2^5=32 поља) и попунимо она поља где функција има вредност нула - f(0):

$x_1=0$

x_4x_5 \ x_2x_3	00	01	11	10
00	0			0
01	0	0	0	0
11			0	
10	0			0

$x_1=1$

x_4x_5 \ x_2x_3	00	01	11	10
00				0
01			0	0
11			0	
10		0		0

Треба напоменути да прва Карноова карта важи када је $x_1=0$, а друга Карноова карта када је $x_1=1$. Остале промењљиве x_2,x_3,x_4,x_5 се распоређују као код Карноове карте ранга 4 (са 16 поља). Прво тражимо фигуре што је могуће већег ранга на истим местима у обе Карноове карте (и за $x_1=0$ и за $x_1=1$), а затим тражимо фигуре што је могуће већег ранга на свакој Карноовој карти појединачно.

Након тога за све заокружене фигуре исписујемо производ елементарних сума, који представља минималну вредност КНФ функције:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3 + x_5)(x_1 + x_4 + \overline{x}_5)(\overline{x}_2 + x_3 + x_5)(\overline{x}_2 + \overline{x}_3 + \overline{x}_5)(\overline{x}_2 + x_4 + \overline{x}_5)(\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3 + \overline{x}_4 + x_5)$$

г) У задатку је дат скуп вектора на којима функција f има вредност нула - f(0)={6,7,10,13} и скуп вектора на којима се функција f не јавља - f(b)={1,4,11,12,15}, а пошто се тражи минимална ДНФ функције, потребно је да одредимо где функција има вредност један - f(1). Функција f има вредност један на свим векторима, осим оних на којима има вредност нула и оних вектора на којима се функција не јавља - f(b):

f(1) ={0, 2, 3, 5, 8, 9, 14}

Затим нацртамо Карноову карту за функцију f која зависи од 4 променљиве и попунимо она поља где функција има вредност један - f(1) и она поља где се функција не јавља - f(b). Вектори који се никада не јављају у Карноовој карти се обележавају са b и они могу бити врло битни при добијању минималнијег решења. Како нам није важно коју вредност функција има на овим векторима, јер се они никада не јављају, можемо користити ту вредност и као нулу и као јединицу. У овом задатку користићемо b као вредност један, зато што тражимо минималну ДНФ функције:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	b	b	1
01	b	1		1
11	1		b	b
10	1		1	

Из Карноове карте налазимо правилне фигуре што је могуће већег ранга, које ћемо заокружити, а након тога исписујемо суму елементарних производа, тако да сваки елементарни производ одговара по једној од заокружених фигура:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1\overline{x}_3 + \overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1x_2x_3$$