II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.1 OSNOVNI POJMOVI

Prekidačkim ili logičkim funkcijama se nazivaju preslikavanja $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Elementi skupa $\{0,1\}^n$ su uređene n-torke (x_1, x_2, ..., x_n) u kojima x_1, x_2, ..., x_n uzimaju vrednosti iz skupa $\{0,1\}$. Pri tome

uređene n-torke (x_1, x_2, ..., x_n) se nazivaju vektori, a

x_1, x_2, ..., x_n se nazivaju koordinate.

Svaki vektor iz skupa $\{0,1\}^n$ se može jednostavnije predstavljati pomoći indeksa vektora do koga se u decimalnom sistemu dolazi na sledeći način:

1. vektor (x_1, x_2, ..., x_n) se uprošćeno piše x_1 x_2 ... x_n;
2. uprošćeno napisan vektor x_1 x_2 ... x_n se interpretira kao binarni broj i;
3. binarni broj i pridružen vektoru (x_1, x_2, ..., x_n) se naziva indeks vektora;
4. indeks vektora se u decimalnom sistemu izračunava po formuli

$$i = \sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j},$$

gde je $x_j \in \{0,1\}$, a suma označava obično sabiranje.

Primeri određivanja indeksa vektora:

1. za vektor (0, 0, 0, 1, 0), koji se piše i kao 00010, indeks je i = 2;
2. za vektor (0, 1, 1, 0, 0, 1), koji se piše i kao 011001, indeks je i = 25;

Broj vektora u skupu $\{0,1\}^n$ je 2^n.

Za označavanje prekidačkih funkcija koriste se uobičajene oznake koje se koriste i za funkcije realne promenljive.

Primeri: f(x_1, x_2, ..., x_n), g(x_1, x_2, ..., x_n) itd.

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.1 OSNOVNI POJMOVI

Prekidačke funkcije imaju konačnu oblast definisanosti i mogu se predstavljati tablicama koje se nazivaju kombinacione tablice ili tablice istinitosti.

Tablica sa slike 1 predstavlja najjednostavniji oblik kombinacione tablice.

i	x_1	x_2	...	x_n	f(i)
0	0	0	...	0	f(0)
1	0	0	...	1	f(1)
. . .	. . .	. . .	... ...	. . .	. . .
2^n-1	1	1	...	1	f(2^n-1)

Slika 1 Kombinaciona tablica

Kombinaciona tablica sa slike 1 sadrži tri kolone:

1. prva kolona sadrže indekse vektora
2. druga kolona sadrži vektore
3. treća kolona sadrži vrednosti funkcije na odgovarajućim vektorima

Napomena: Prekidačka funkcija je potpuno određena

1. prvom i trećom kolonom ili
2. drugom i trećom kolonom,

ali se veoma često u kombinacionu tablicu stavlja i prva kolona sa indeksima vektora i druga kolona sa vektorima.

Prekidačka funkcija kod koje je vrednost definisana na svakom vektoru iz skupa $\{0,1\}^n$, naziva se potpuno definisana prekidačka funkcija.

Nepotpuno ili delimično definisana prekidačka funkcija je ona funkcija kojoj nisu definisane vrednosti na svim vektorima iz skupa $\{0,1\}^n$.

Da bi se u kombinacionoj tablici naznačilo da vrednost prekidačke funkcije na nekom vektoru nije definisana, simbol " b " se upisuje u odgovarajuću ćeliju kolone f(i).

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.1 OSNOVNI POJMOVI

Prekidačka funkcija se može predstaviti i skupovima indeksa koji odgovaraju vektorima na kojima funkcija ima vrednost 1, na kojima funkcija ima vrednost 0 i na kojima vrednost funkcije nije definisana i koji se označavaju sa f(1), f(0) i f(b), respektivno.

Potpuno definisana prekidačka funkcija se zadaje skupovima f(1) i f(0), dok se nepotpuno definisana prekidačka funkcija zadaje skupovima f(1), f(0) i f(b).

Potpuno definisana prekidačke funkcija se može zadati i samo jednim od dva skupa f(1) i f(0), jer je $f(1) \cup f(0) = \{0,1\}^n$, dok se nepotpuno definisana prekidačka funkcija može zadati i samo sa dva od tri skupa f(1), f(0) i f(b) jer je $f(1) \cup f(0) \cup f(b) = \{0,1\}^n$.

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.1 OSNOVNI POJMOVI

Primer II.1.1. Prekidačku funkciju f(x_1, x_2, x_3), koja je zadata skupovima indeksa f(1) = {0, 4, 7) i f(b) = {1, 5), predstaviti kombinacionom tablicom.

Rešenje: Kombinaciona tablica date funkcije je data na slici 2.

i	x_1	x_2	x_3	f(i)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	b
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	b
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Slika 2 Kombinaciona tablica za primer II.1.1.

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.1 OSNOVNI POJMOVI

Veličine koje dobijaju samo dve vrednosti nazivaju se binarnim veličinama. Zato se za prekidačke funkcije kaže da su to binarne funkcije koje zavise od binarnih promenljivih.

Prekidačke funkcije se mogu uvrštavati umesto nezavisno promenljivih u druge prekidačke funkcije. Takvo uvrštavanje se naziva superpozicija prekidačkih funkcija.

Kombinacione tablice nisu pogodan način predstavljanja prekidačkih funkcija većeg broja promenljivih.

Zato se neki drugi načini predstavljanja prekidačkih funkcija razmatraju u sledećim poglavljima.

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.2 PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA BULOVIM IZRAZIMA

II.2.1 PROIZVODI I SUME

II.2.2 DISJUNKTIVNE I KONJUKTIVNE NORMALNE FORME

II.2.3 PREKIDAČKE FUNKCIJE JEDNE I DVE PROMENLJIVE

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.2 PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA BULOVIM IZRAZIMA

II.2.1 PROIZVODI I SUME

Svaki Bulov izraz predstavlja prekidačku funkciju ako se simboli elemenata posmatraju kao nezavisne promenljive koje dobijaju vrednosti iz skupa {0,1}.

Da bi se dokazalo da vredi i obrnuto i da se svaka prekidačka funkcija može predstaviti nekim Bulovim izrazom, analiziraju se, najpre, osobine jednostavnih Bulovih izraza koji se nazivaju proizvodi i sume.

Označimo sa $\tilde{x}$ i nazovimo slovom promenljivu x i njenu negaciju $\overline{x}$, tako da je $\tilde{x} = x$ ili $\tilde{x} = \overline{x}$.

Posmatrajmo najpre izraze

$$\tilde{x}_{j_1}\tilde{x}_{j_2}...\tilde{x}_{j_k} \text{ i } \tilde{x}_{j_1} + \tilde{x}_{j_2} + ... + \tilde{x}_{j_k}$$

gde su j_1, j_2, ..., j_k po parovima različiti brojevi iz skupa {1, 2, ..., n}.

1. Izraz $\tilde{x}_{j_1}\tilde{x}_{j_2}...\tilde{x}_{j_k}$ nazivaćemo elementarnim proizvodom.
2. Izraz $\tilde{x}_{j_1} + \tilde{x}_{j_2} + ... + \tilde{x}_{j_k}$ nazivaćemo elementarnom sumom.

Promenljiva x se može pojaviti u elementarnom proizvodu i elementarnoj sumi najviše jedanput i to bez negacije i sa negacijom.

Definicija uključuje i slučaj k = 1. Tada elementarni proizvod ili suma ima samo jedno slovo i to nezavisno promenljivu ili njenu negaciju.

Konstanta jedinica se smatra elementarnim proizvodom, a konstanta nula elementarnom sumom.

Primeri:

1. elementarni proizvod: 1, x_1, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_1\overline{x}_2$, $x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_5$
2. elementarna suma: 0, x_1, $\overline{x}_3$, $\overline{x}_1 + \overline{x}_3$, $x_1 + x_2 + \overline{x}_4 + \overline{x}_5$

Broj r = n – k naziva se rang elementarnog proizvoda ili elementarne sume. Rang pokazuje koliko se promenljivih iz posmatranog skupa ne pojavljuje u elementarnom prouzvodu ili elementarnoj sumi.

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.2 PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA BULOVIM IZRAZIMA

II.2.1 PROIZVODI I SUME

Elementarni proizvod i elementarna suma ranga 0 u koje ulaze sve promenljive i pišu se $\tilde{x}_{j_1}\tilde{x}_{j_2}...\tilde{x}_{j_n}$ i $\tilde{x}_{j_1}+\tilde{x}_{j_2}+...+\tilde{x}_{j_n}$, nazivaju se potpuni proizvod i potpuna suma.

Potpuni proizvod $\tilde{x}_{j_1}\tilde{x}_{j_2}...\tilde{x}_{j_n}$ ima vrednost 1 samo na jednom vektoru iz skupa $\{0,1\}^n$. To je vektor (a_1, a_2, ..., a_n) u kojem je a_j = 1 ako je $\tilde{x}=x$ i a_j = 0 ako je $\tilde{x}=\overline{x}$. Na svim ostalim vektorima $\tilde{x}_{j_1}\tilde{x}_{j_2}...\tilde{x}_{j_n}$ ima vrednost 0.

Primer: Potpuni proizvod $\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_4$ ima vrednost 1 samo na vektoru (0, 1, 0, 1).

Potpuna suma $\tilde{x}_{j_1}+\tilde{x}_{j_2}+...+\tilde{x}_{j_n}$ ima vrednost 0 samo na jednom vektoru iz skupa $\{0,1\}^n$. To je vektor (a_1, a_2, ..., a_n) u kojem je a_j = 0 ako je $\tilde{x}=x$ i a_j = 1 ako je $\tilde{x}=\overline{x}$. Na svim ostalim vektorima $\tilde{x}_{j_1}+\tilde{x}_{j_2}+...+\tilde{x}_{j_n}$ ima vrednost 1.

Primer: Potpuna suma $\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3 + x_4$ ima vrednost 0 samo na vektoru (1, 0, 1, 0).

Svakom vektoru iz skupa $\{0,1\}^n$ odgovara samo jedan potpuni proizvod i samo jedna potpuna suma, pa je ukupan broj potpunih proizvoda 2^n i ukupan broj potpunih suma 2^n.

Potpuni proizvodi i potpune sume se mogu numerisati na isti način kao i vektori iz skupa $\{0,1\}^n$ za koje se formiraju.

Primer: Potpuni proizvod $\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_4$, formiran za vektor (0, 1, 0, 1) čiji je indeks 5, se označava kao P_5. Potpuna suma $\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3 + x_4$, formirana za vektor (1, 0, 1, 0) čiji je indeks 10, se označava kao S_{10}.

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.2 PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA BULOVIM IZRAZIMA

II.2.1 PROIZVODI I SUME

Neka je p = $\tilde{x}_{j_1}\tilde{x}_{j_2}...\tilde{x}_{j_k}$ jedan od elementarnih proizvoda u kojima se od n promenljivih pojavljuje k promenljivih, pa je njegov rang r = n – k.

Neka se sa promenljivom x_i, koja predstavlja jednu od promenljivih koja se ne pojavljuje u elementarnom proizvodu p, izvrši sledeća transformacija

$$p = p \cdot 1 = p \cdot (x_i + \overline{x}_i) = px_i + p\overline{x}_i$$

Ova transformacija se naziva <u>razvijanje elementarnog proizvoda</u>. Ako se razvijanje produži i realizuje i po promenljivoj x_j, koja se, takođe, ne pojavljuje u elementarnom proizvodu p, dobija se:

$$p = px_i + p\overline{x}_i = p \cdot 1 = (px_i + p\overline{x}_i) \cdot 1 = (px_i + p\overline{x}_i) \cdot (x_j + \overline{x}_j)$$

$$p = px_i + p\overline{x}_i = (px_i + p\overline{x}_i) \cdot (x_j + \overline{x}_j) = px_ix_j + px_i\overline{x}_j + p\overline{x}_ix_j + p\overline{x}_i\overline{x}_j$$

Ako se razvijanje elementarnog proizvoda p nastavi po svim promenljivima koje se ne pojavljuju u njemu, dobija se suma od 2^r potpunih proizvoda, gde je r rang elementarnog proizvoda p. Ovih 2^r potpunih proizvoda imaju k jednakih slova, i to $\tilde{x}_{j_1}\tilde{x}_{j_2}...\tilde{x}_{j_k}$, a razlikuju se u preostalih r = n – k slova, koja predstavljaju 2^r potpunih proizvoda formiranih od slova koja se ne pojavljuju u elementarnom proizvodu p.

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.2 PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA BULOVIM IZRAZIMA

II.2.1 PROIZVODI I SUME

Odavde se uočava sledeće praktično pravilo za razvijanje elementarnog proizvoda od k promenljivih po svih r = n – k promenljivih koje se u njemu ne pojavljuju:

1. najpre treba formirati 2^r potpunih proizvoda od r = n – k promenljivih koje se ne pojavljuju u elementarnom proizvodu p,
2. zatim treba svaki tako formirani potpuni proizvod pomnožiti elementarnim proizvodom p i
3. na kraju treba tako formiranih 2^r potpunih proizvoda od n promenljivih sabrati.

Primer: Ako se elementarni proizvod $x_2\overline{x}_4$ u kome se javljaju samo dve promenljive posmatra kao funkcija četiri promenljive, onda se njegovo razvijanje po r = 4 – 2 promenljivih x_1 i x_3 koje se u njemu ne javljaju može realizovati na sledeći način:

1. najpre se formira $2^r = 2^2 = 4$ potpuna proizvoda $\overline{x}_1\overline{x}_3$, $\overline{x}_1 x_3, x_1\overline{x}_3$ i $x_1 x_3$,
2. zatim se svaki od njih množi sa $x_2\overline{x}_4$ i
3. na kraju se formirani potpuni proizvode četiri promenljive $\overline{x}_1 x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$, $\overline{x}_1 x_2 x_3\overline{x}_4$, $x_1 x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$ i $x_1 x_2 x_3\overline{x}_4$ sabiraju , čime se dobija da je

$$x_2\overline{x}_4 = \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1 x_2 x_3\overline{x}_4 + x_1 x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1 x_2 x_3\overline{x}_4$$

Zaključak: Elementarni proizvod ranga r ima vrednost 1 na 2^r vektora iz skupa $\{0,1\}^n$. Ti vektori pripadaju elementarnom proizvodu i imaju k = n – r jednakih koordinata.

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.2 PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA BULOVIM IZRAZIMA

II.2.1 PROIZVODI I SUME

Neka je s = $\tilde{x}_{j_1} + \tilde{x}_{j_2} + ... + \tilde{x}_{j_k}$ jedna od elementarnih suma u kojoj se od n promenljivih pojavljuje k promenljivih, pa je njen rang r = n – k.

Neka se sa promenljivom x_i, koja predstavlja jednu od promenljivih koja se ne pojavljuje u elementarnoj sumi s, izvrši sledeća transformacija

$$s = s + 0 = s + x_i\bar{x}_i = (s + x_i)(s + \bar{x}_i)$$

Ova transformacija se naziva <u>razvijanje elementarne sume</u>. Ako se razvijanje produži i realizuje i po promenljivoj x_j, koja se, takođe, ne pojavljuje u elementarnoj sumi s, dobija se:

$$s = (s + x_i)(s + \bar{x}_i) + 0 = (s + x_i)(s + \bar{x}_i) + x_j\bar{x}_j =$$

$$s = ((s + x_i)(s + \bar{x}_i) + x_j)((s + x_i)(s + \bar{x}_i) + \bar{x}_j) =$$

$$s = ((s + x_i + x_j)(s + \bar{x}_i + x_j)((s + x_i + \bar{x}_j)(s + \bar{x}_i + \bar{x}_j)$$

Ako se razvijanje elementarne sume s nastavi po svim promenljivima koje se ne pojavljuju u njoj, dobija se proizvod od 2^r potpunih suma, gde je r rang elementarne sume s. Ovih 2^r potpunih suma imaju k jednakih slova, i to $\tilde{x}_{j_1} + \tilde{x}_{j_2} + ... + \tilde{x}_{j_k}$, a razlikuju se u preostalih r = n – k slova, koja predstavljaju 2^r potpunih suma formiranih od slova koja se ne pojavljuju u elementarnoj sumi s.

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.2 PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA BULOVIM IZRAZIMA

II.2.1 PROIZVODI I SUME

Odavde se uočava sledeće praktično pravilo za razvijanje elementarne sume od k promenljivih po svih r = n – k promenljivih koje se u njoj ne pojavljuju:

1. najpre treba formirati 2^r potpunih suma od r = n – k promenljivih koje se ne pojavljuju u elementarnoj sumi s,
2. zatim treba svaku tako formiranu potpunu sumu sabrati sa elementarnom sumom s i
3. na kraju treba tako formiranih 2^r potpunih suma od n promenljivih pomnožiti.

Primer: Ako se elementarna suma $\overline{x}_1 + \overline{x}_3$, u kojoj se javljaju samo dve promenljive, posmatra kao funkcija četiri promenljive, onda se njeno razvijanje po r = 4 – 2 promenljivih x_2 i x_4 koje se u njoj ne javljaju može realizovati na sledeći način:

1. najpre se formira $2^r = 2^2 = 4$ potpunih suma $\overline{x}_2 + \overline{x}_4$, $\overline{x}_2 + x_4$, $x_2 + \overline{x}_4$ i $x_2 + x_4$,
2. zatim se svaka od njih sabira sa $\overline{x}_1 + \overline{x}_3$ i
3. na kraju se formirane potpune sume četiri promenljive $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3 + \overline{x}_4$, $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3 + x_4$, $\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3 + \overline{x}_4$ i $\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3 + x_4$ množe , čime se dobija da je

$$\begin{aligned}\overline{x}_1 + \overline{x}_3 = {} & (\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3 + \overline{x}_4)\ (\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3 + x_4) \\ & (\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3 + \overline{x}_4)\ (\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3 + x_4)\end{aligned}$$

Zaključak: Elementarni suma ranga r ima vrednost 0 na 2^r vektora iz skupa $\{0,1\}^n$. Ti vektori pripadaju elementarnoj sumi i imaju k = n – r jednakih koordinata.

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.2 PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA BULOVIM IZRAZIMA

II.2.1 PROIZVODI I SUME

Transformisanje sume od 2^r potpunih proizvoda u elementarni proizvod ranga r je procedura inverzna razvijanju. Međutim, ne može se svaka suma od 2^r potpunih proizvoda transformisati u elementarni proizvod ranga r. Ovo transformisanje je moguće samo ukoliko 2^r potpunih proizvoda ima $k = n - r$ zajedničkih slova.

Isto važi i za transformisanje proizvoda od 2^r potpunih suma u elementarnu sumu ranga r.

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.2 PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA BULOVIM IZRAZIMA

II.2.2 DISJUNKTIVNE I KONJUKTIVNE NORMALNE FORME

Suma elementarnih proizvoda $p_1 + p_2 + ... + p_m$, gde je $p_i = \tilde{x}_{j_1}\tilde{x}_{j_2}...\tilde{x}_{j_k}$, naziva se disjunktivna normalna forma (DNF).

Proizvod elementarnih suma $s_1 s_2 ... s_m$, gde je $s_i = \tilde{x}_{j_1} + \tilde{x}_{j_2} + ... + \tilde{x}_{j_k}$, naziva se konjuktivna normalna forma (KNF).

DNF u kojoj su svi elementarni proizvode potpuni proizvodi, naziva se savršena DNF (SDNF).

KNF u kojoj su svi elementarne sume potpune sume, naziva se savršena KNF (SKNF).

SDNF i DNF predstavljaju Bulove izraze prekidačkih funkcija. Svaki potpuni proizvod koji se pojavljuje u SDNF daje vrednost 1 na vektoru za koji je formiran. Koliko ima potpunih proizvoda u SDNF na toliko vektora prekidačka funkcija ima vrednost 1. Na svim ostalim vektorima prekidačka funkcija ima vrednost 0. Svaki elementarni proizvod koji se pojavljuje u DNF daje vrednost 1 na 2^r vektora, pri čemu je r rang datog elementarnog proizvoda. Na svim ostalim vektorima prekidačka funkcija ima vrednost 0.

SKNF i KNF predstavljaju Bulove izraze prekidačkih funkcija. Svaka potpuna suma koja se pojavljuje u SKNF daje vrednost 0 na vektoru za koji je formirana. Koliko ima potpunih suma u SKNF na toliko vektora prekidačka funkcija ima vrednost 0. Na svim ostalim vektorima prekidačka funkcija ima vrednost 1. Svaka elementarna suma koja se pojavljuje u KNF daje vrednost 0 na 2^r vektora, pri čemu je r rang date elementarne suma. Na svim ostalim vektorima prekidačka funkcija ima vrednost 1.

<u>Videćemo da ukoliko je neka prekidačka funkcija data skupovima indeksa vektora na kojima prekidačka funkcija ima vrednost 1 i 0, data prekidačka funkcija može da se predstavi u obliku SDNF i SKNF.</u>

II.2 PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA BULOVIM IZRAZIMA

II.2.2 DISJUNKTIVNE I KONJUKTIVNE NORMALNE FORME

Teorema 2.2.1. Svaka prekidačka funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, izuzev konstante nula, može se na jedinstven način napisati u obliku

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = P_{i_1} + P_{i_2} + ... + P_{i_m},$$

gde su P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_m} potpuni proizvodi koji odgovaraju vektorima na kojima funkcija ima vrednost 1, koji predstavlja SDNF.

Dokaz. U skupu $\{0,1\}^n$ uočimo proizvoljan vektor.

1. Ako je vrednosti funkcije na uočenom vektoru 1, onda se potpuni proizvod koji odgovara tom vektoru mora nalaziti na desnoj strani relacije. Iz osobina potpunog proizvoda i pravila Bulove algebre proizlazi da desna strana relacije ima u ovom slučaju vrednost 1.
2. Ako je vrednosti funkcije na uočenom vektoru 0, onda svi potpuni proizvodi na desnoj strani relacije imaju na tom vektoru vrednost 0. Zbog toga proizlazi da desna strana relacije ima u ovom slučaju vrednost 0.
3. Budući da je vektor proizvoljno izabran, zaključujemo da je desna strana relacije jednaka levoj za sve vektore iz skupa $\{0,1\}^n$.
4. Konstanta nula ima vrednost 0 na svim vektorima iz skupa$\{0,1\}^n$, pa se ne može napisati u obliku SDNF.

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.2 PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA BULOVIM IZRAZIMA

II.2.2 DISJUNKTIVNE I KONJUKTIVNE NORMALNE FORME

Teorema 2.2.2. Svaka prekidačka funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, izuzev konstante jedinica, može se na jedinstven način napisati u obliku

$f(x_1, x_2, ..., x_n) = S_{i_1} S_{i_2} ... S_{i_m}$,

gde su S_{i_1} , S_{i_2} , ..., S_{i_m} potpune sume koje odgovaraju vektorima na kojima funkcija ima vrednost 0, koji predstavlja SKNF.

Dokaz. U skupu $\{0,1\}^n$ uočimo proizvoljan vektor.

1. Ako je vrednosti funkcije na uočenom vektoru 0, onda se potpuna suma koja odgovara tom vektoru mora nalaziti na desnoj strani relacije. Iz osobina potpunog proizvoda i pravila Bulove algebre proizlazi da desna strana relacije ima u ovom slučaju vrednost 0.

2. Ako je vrednosti funkcije na uočenom vektoru 1, onda sve potpune sume na desnoj strani relacije imaju na tom vektoru vrednost 1. Zbog toga proizlazi da desna strana relacije ima u ovom slučaju vrednost 1.

3. Budući da je vektor proizvoljno izabran, zaključujemo da je desna strana relacije jednaka levoj za sve vektore iz skupa $\{0,1\}^n$.

4. Konstanta jedinica ima vrednost 1 na svim vektorima iz skupa$\{0,1\}^n$, pa se ne može napisati u obliku SKNF.

Ovim se došlo do analitičke forme predstavljanja prekidačkih funkcija u obliku SDNF i SKNF.

Ako se za svaki vektor na kome prekidačka funkcija ima vrednost 1 napiše potpuni proizvod, pa se zatim ti potpuni proizvodi povežu znacima disjunkcije, dobija se SDNF posmatrane funkcije.

Ako se za svaki vektor na kome prekidačka funkcija ima vrednost 0 napiše potpuna suma, pa se zatim te potpune sume povežu znacima konjunkcije, dobija se SKNF posmatrane funkcije.

Primer 2.2.1. Prekidačku funkciju $f(x_1, x_2, x_3)$ zadatu skupom indeksa $f(1) = \{2, 4, 5, 7\}$ napisati u obliku SDNF i SKNF.

Rešenje:

SDNF zadate funkcije se dobija na sledeći način:

1. Funkcija ima vrednost 1 na vektorima sa indeksima 2 = 010, 4 = 100, 5 = 101 i 7 = 111.
2. Potpuni proizvodi koji odgovaraju ovim vektorima su: $P_2 = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3$, $P_4 = x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$, $P_5 = x_1 \overline{x}_2 x_3$, $P_7 = x_1 x_2 x_3$,
3. SDNF zadate funkcije je: $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 + x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 + x_1 \overline{x}_2 x_3 + x_1 x_2 x_3$

SKNF zadate funkcije se dobija na sledeći način:

1. Funkcija ima vrednost 0 na vektorima sa indeksima 0 = 000, 1 = 001, 3 = 011 i 6 = 110.
2. Potpune sume koje odgovaraju ovim vektorima su: $S_0 = x_1 + x_2 + x_3$, $S_1 = x_1 + x_2 + \overline{x}_3$, $S_3 = x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3$, $S_6 = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3$,
3. SKNF zadate funkcije je: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + \overline{x}_3)(x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3)$

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.2 PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA BULOVIM IZRAZIMA

II.2.2 DISJUNKTIVNE I KONJUKTIVNE NORMALNE FORME

Prekidačka funkcija se može predstaviti i u obliku dve savršene normalne forme i to SDNF i SKNF. U opštem slučaju se transformacijama može doći od jedne do druge normalne forme, ali je ovaj put po pravilu veoma dug. Mnogo je jednostavnije na osnovu zadate savršene normalne forme odrediti skupove f(1) i f(0), pa napisati drugu savršenu normalnu formu na prethodno opisani način.

Primer 2.2.2. Napisati SKNF prekidačke funkcije
$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1 x_2\overline{x}_3$

Rešenje:
SKNF zadate funkcije se dobija na sledeći način:

1. Prekidačka funkcija je data u obliku SDNF, pa se utvrđuje da je f(1) = {0, 3, 4, 6} i f(0) = {1, 2, 5, 7}
2. Funkcija ima vrednost 0 na vektorima sa indeksima
   1 = 001, 2 = 010, 5 = 101 i 7 = 111.
3. Potpune sume koje odgovaraju ovim vektorima su:
   $S_1 = x_1 + x_2 + \overline{x}_3$, $S_2 = x_1 + \overline{x}_2 + x_3$, $S_5 = \overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3$, $S_7 = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3$,
4. SKNF zadate funkcije je:
   $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + \overline{x}_3)\ (x_1 + \overline{x}_2 + x_3)\ (\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3)\ (\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)$

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.2 PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA BULOVIM IZRAZIMA

II.2.2 DISJUNKTIVNE I KONJUKTIVNE NORMALNE FORME

DNF i KNF predstavljaju Bulove izraze nekih prekidačkih funkcija. Pošto se svaka prekidačka funkcija može predstaviti u obliku SDNF i SKNF, pokazaćemo kako se DNF transformiše u SDNF i KNF u SKNF.

Transformisanje DNF u SDNF se zasniva na razvijanju svih elementarnih proizvoda u zadatoj DNF do potpunih proizvoda i eliminaciji suvišnih članova. Transformisanje KNF u SKNF se zasniva na razvijanju svih elementarnih suma u zadatoj DNF do potpunih suma i eliminaciji suvišnih članova.

Primer 2.2.3.a. DNF prekidačke funkcije

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2x_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$

transformisati u SDNF.

Rešenje:

Transformisanje DNF u SDNF

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2x_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 =$$
$$= x_1\ (x_2 + \overline{x}_2)\ (x_3 + \overline{x}_3) + x_2x_3\ (x_1 + \overline{x}_1) + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 =$$
$$= x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1x_2x_3 + \overline{x}_1x_2x_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 =$$
$$= x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2x_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$$

Napomena:

1. Potpuni proizvod $x_1x_2x_3$ je sadržan i u elementarnom proizvodu x_1 i u elementarnom proizvodu x_2x_3, pa se javlja dva puta. Jedan od dva potpuna proizvoda $x_1x_2x_3$ je suvišan, pa se eliminiše iz konačnog izraza za SDNF.

2. Do SDNF se moglo doći i na drugi način. Od elementarnog proizvoda x_1 je trebalo formirati četiri potpuna proizvoda $x_1x_2x_3$, $x_1x_2\overline{x}_3$, $x_1\overline{x}_2x_3$ i $x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$, a od x_2x_3 je trebalo formirati dva potpuna proizvoda $x_1x_2x_3$ i $\overline{x}_1x_2x_3$ i njih zajedno sa potpunim proizvodom $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$ iz DNF povezati znakom disjunkcije.

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.2 PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA BULOVIM IZRAZIMA

II.2.2 DISJUNKTIVNE I KONJUKTIVNE NORMALNE FORME

Primer 2.2.3.b. KNF prekidačke funkcije

$g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_2\ (\overline{x}_1 + \overline{x}_3)\ (x_1 + x_2 + x_3)$

transformisati u SKNF,

Rešenje:

Transformisanje KNF u SKNF

$$g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_2\ (\overline{x}_1 + \overline{x}_3)\ (x_1 + x_2 + x_3) =$$
$$= (\overline{x}_2 + x_1\overline{x}_1 + x_3\overline{x}_3)\ (\overline{x}_1 + \overline{x}_3 + x_2\overline{x}_2)\ (x_1 + x_2 + x_3) =$$
$$= ((\overline{x}_2 + x_1)(\overline{x}_2 + \overline{x}_1) + x_3\overline{x}_3)\ ((\overline{x}_1 + \overline{x}_3 + x_2)(\overline{x}_1 + \overline{x}_3 + \overline{x}_2))\ (x_1 + x_2 + x_3) =$$
$$= ((\overline{x}_2 + x_1)(\overline{x}_2 + \overline{x}_1) + x_3)((\overline{x}_2 + x_1)(\overline{x}_2 + \overline{x}_1) + \overline{x}_3)$$
$$(\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)\ (x_1 + x_2 + x_3) =$$
$$= (\overline{x}_2 + x_1 + x_3)(\overline{x}_2 + \overline{x}_1 + x_3)(\overline{x}_2 + x_1 + \overline{x}_3)(\overline{x}_2 + \overline{x}_1 + \overline{x}_3)$$
$$(\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)\ (x_1 + x_2 + x_3) =$$
$$= (x_1 + \overline{x}_2 + x_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3)(x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)$$
$$(\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)\ (x_1 + x_2 + x_3) =$$
$$= (x_1 + \overline{x}_2 + x_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3)(x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)$$
$$(\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3)\ (x_1 + x_2 + x_3)$$

Napomena:

1. Potpuna suma $(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)$ je sadržana i u elementarnoj sumi $\overline{x}_2$ i u elementarnoj sumi $(\overline{x}_1 + \overline{x}_3)$, pa se javlja dva puta. Jedna od dve potpune sume $(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)$ je suvišna, pa se eliminiše iz konačnog izraza za SKNF.

2. Do SKNF se moglo doći i na drugi način. Od elementarne sume $\overline{x}_2$ je trebalo formirati četiri potpune sume $(x_1 + \overline{x}_2 + x_3)$, $(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3)$, $(x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)$ i $(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)$, a od elementarne sume $(\overline{x}_1 + \overline{x}_3)$ je trebalo formirati dve potpune sume $(\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3)$ i $(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)$ i njih zajedno sa potpunom sumom $(x_1 + x_2 + x_3)$ iz KNF povezati znakom konjukcije.

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.2 PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA BULOVIM IZRAZIMA

II.2.2 DISJUNKTIVNE I KONJUKTIVNE NORMALNE FORME

Svaka prekidačka funkcija se može predstaviti u obliku SDNF i SKNF. Međutim u opštem slučaju SDNF se može transformisati u DNF, a SKNF u KNF.

Do DNF se dolazi uprošćavanjem SDNF.

Primer 2.2.4. Naći neke jednostavnije DNF prekidačke funkcije

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_1x_2x_3$

Rešenje:

Sažimanjem potpunih proizvoda $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$ i $x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$ po x_1 i potpunih proizvoda $x_1\overline{x}_2x_3$ i $x_1x_2x_3$ po x_2, dobija se:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_1x_2x_3 =$$
$$= \overline{x}_2\overline{x}_3(\overline{x}_1 + x_1) + x_1x_3(\overline{x}_2 + x_2) = \overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1x_3$$

Međutim, ako se izvrši sažimanje $x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$ i $x_1\overline{x}_2x_3$ po x_3, dobija se:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_1x_2x_3 =$$
$$= \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2(\overline{x}_3 + x_3) + x_1x_2x_3 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2 + x_1x_2x_3$$

Iz ovog primera se vidi da je potreban formalan postupak kojim se od SDNF dolazi do minimalne DNF.

Do KNF se dolazi uprošćavanjem SKNF.

Primer 2.2.5. Naći neke jednostavnije KNF prekidačke funkcije
$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+\overline{x}_2+x_3)(\overline{x}_1+\overline{x}_2+x_3)(\overline{x}_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3)(\overline{x}_1+x_2+\overline{x}_3)$

Rešenje:

Sažimanjem potpunih suma $(x_1+\overline{x}_2+x_3)$ i $(\overline{x}_1+\overline{x}_2+x_3)$ po x_1 i potpunih suma $(\overline{x}_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3)$ i $(\overline{x}_1+x_2+\overline{x}_3)$ po x_2, dobija se:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+\overline{x}_2+x_3)(\overline{x}_1+\overline{x}_2+x_3)(\overline{x}_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3)(\overline{x}_1+x_2+\overline{x}_3) =$$
$$= (x_1\overline{x}_1+\overline{x}_2+x_3)(\overline{x}_1+\overline{x}_3+\overline{x}_2x_2) = (\overline{x}_2+x_3)(\overline{x}_1+\overline{x}_3)$$

Međutim, ako se izvrši sažimanje $(\overline{x}_1+\overline{x}_2+x_3)$ i $(\overline{x}_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3)$ po x_3, dobija se:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+\overline{x}_2+x_3)(\overline{x}_1+\overline{x}_2+x_3)(\overline{x}_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3)(\overline{x}_1+x_2+\overline{x}_3) =$$
$$= (x_1+\overline{x}_2+x_3)(\overline{x}_1+\overline{x}_2+x_3\overline{x}_3)(\overline{x}_1+x_2+\overline{x}_3) =$$
$$= (x_1+\overline{x}_2+x_3)(\overline{x}_1+\overline{x}_2)(\overline{x}_1+x_2+\overline{x}_3)$$

Iz ovog primera se da je potreban formalan postupak kojim se od SKNF dolazi do minimalne KNF.

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.2 PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA BULOVIM IZRAZIMA

II.2.2 DISJUNKTIVNE I KONJUKTIVNE NORMALNE FORME

Postoje Bulovi izrazi prekidačkih funkcija koji nisu u obliku neke od normalnih formi. Takav izraz se može uvek prevesti u neku normalnu formu korišćenjem raznih transformacionih relacija Bulove algebre.

Primer 2.2.6. Bulov izraz prekidačke funkcije

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + \overline{x}_2)(x_3 + \overline{x}_3 x_4 \overline{(x_1 + x_2 \overline{x}_4)})$

transformisati u neku DNF i neku KNF.

Rešenje:

Transformacija u DNF.

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + \overline{x}_2)(x_3 + \overline{x}_3 x_4 \overline{(x_1 + x_2 \overline{x}_4)}) =$

$= (x_1 + \overline{x}_2)(x_3 + \overline{x}_3 x_4 \overline{x}_1 \overline{x_2 \overline{x}_4}) = (x_1 + \overline{x}_2)(x_3 + \overline{x}_3 x_4 \overline{x}_1 (\overline{x}_2 + x_4)) =$

$= (x_1 + \overline{x}_2)(x_3 + \overline{x}_3 x_4 \overline{x}_1 \overline{x}_2 + \overline{x}_3 x_4 \overline{x}_1 x_4) = (x_1 + \overline{x}_2)(x_3 + \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 x_4 + \overline{x}_1 \overline{x}_3 x_4) =$

$= (x_1 + \overline{x}_2)(x_3 + \overline{x}_1 \overline{x}_3 x_4 (\overline{x}_2 + 1)) = (x_1 + \overline{x}_2)(x_3 + \overline{x}_1 \overline{x}_3 x_4) =$

$= (x_1 x_3 + x_1 \overline{x}_1 \overline{x}_3 x_4 + \overline{x}_2 x_3 + \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 x_4) = (x_1 x_3 + \overline{x}_2 x_3 + \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 x_4)$

Transformacija u KNF.

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + \overline{x}_2)(x_3 + \overline{x}_3 x_4 \overline{(x_1 + x_2 \overline{x}_4)}) =$

$= (x_1 + \overline{x}_2)(x_3 + \overline{x}_3 x_4)(x_3 + \overline{(x_1 + x_2 \overline{x}_4)}) =$

$= (x_1 + \overline{x}_2)(x_3 + \overline{x}_3)(x_3 + x_4)(x_3 + \overline{x}_1 \overline{x_2 \overline{x}_4}) =$

$= (x_1 + \overline{x}_2)(x_3 + \overline{x}_3)(x_3 + x_4)(x_3 + \overline{x}_1 (\overline{x}_2 + x_4)) =$

$= (x_1 + \overline{x}_2)(x_3 + x_4)(x_3 + \overline{x}_1)(x_3 + (\overline{x}_2 + x_4)) =$

$= (x_1 + \overline{x}_2)(x_3 + x_4)(\overline{x}_1 + x_3)(\overline{x}_2 + x_3 + x_4)$

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.2 PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA BULOVIM IZRAZIMA

II.2.3 PREKIDAČKE FUNKCIJE JEDNE I DVE PROMENLJIVE

Operacije negacije, disjunkcije i konjukcije, kojima je definisana Bulova algebra na skupu sa dva elementa, predstavljaju prekidačke funkcije jedne i dve promenljive. Negacija je prekidačke funkcija jedne promenljive, a disjunkcija i konjukcija su prekidačke funkcije dve promenljive.

Skup prekidačkih funkcija pomoću kojih se superpozicijom može napisati bilo koja prekidačka funkcija, naziva se bazis. Mada se bazisi mogu obrazovati i od prekidačkih funkcija sa više promenljivih, praktičan značaj imaju samo bazisi koje obrazuju prekidačke funkcije sa najviše dve promenljive. Stoga se dalje razmatraju prekidačke funkcije jedne promenljive (slika 3) i dve promenljive (slika 4).

x	0 1	Naziv funkcije	Oznaka	Bulov izraz
f_0	0 0	Konstanta nula	0	$f_0 = 0$
f_1	0 1	Promenljiva x	x	$f_1 = x$
f_2	1 0	Negacija x	$\overline{x}$	$f_2 = \overline{x}$
f_3	1 1	Konstanta jedinica	1	$f_3 = 1$

Slika 3 Prekidačke funkcije jedne promenljive

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.2 PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA BULOVIM IZRAZIMA

II.2.3 PREKIDAČKE FUNKCIJE JEDNE I DVE PROMENLJIVE

x_1 x_2	0 0 1 1 0 1 0 1	Naziv funkcije	Oznaka	Bulov izraz
f_0	0 0 0 0	Konstanta nula	0	$f_0 = 0$
f_1	0 0 0 1	Konjukcija, Logički proizvod I funkcija	$x_1 x_2$	$f_1 = x_1 x_2$
f_2	0 0 1 0	Zabrana po x_2	$x_1 \Delta x_2$	$f_2 = x_1 \overline{x}_2$
f_3	0 0 1 1	Promenljiva x_1	x_1	$f_3 = x_1$
f_4	0 1 0 0	Zabrana po x_1	$x_2 \Delta x_1$	$f_4 = \overline{x}_1 x_2$
f_5	0 1 0 1	Promenljiva x_2	x_2	$f_5 = x_2$
f_6	0 1 1 0	Suma po modulu 2 Logička nejednakost Ekskluzivno ILI	$x_1 \oplus x_2$	$f_6 = \overline{x}_1 x_2 + x_1 \overline{x}_2$
f_7	0 1 1 1	Disjunkcija, Logička suma ILI funkcija	$x_1 + x_2$	$f_7 = x_1 + x_2$
f_8	1 0 0 0	Pierce-ova strelica NILI funkcija	$x_1 \downarrow x_2$	$f_0 = \overline{x_1 + x_2}$
f_9	1 0 0 1	Logička jednakost Ekskluzivno NILI	$x_1 \otimes x_2$	$f_9 = \overline{\overline{x}_1 x_2 + x_1 \overline{x}_2}$
f_{10}	1 0 1 0	Negacija x_2	$\overline{x}_2$	$f_{10} = \overline{x}_2$
f_{11}	1 0 1 1	Implikacija od x_2 ka x_1	$x_2 \rightarrow x_1$	$f_{11} = x_1 + \overline{x}_2$
f_{12}	1 1 0 0	Negacija x_1	$\overline{x}_1$	$f_{12} = \overline{x}_1$
f_{13}	1 1 0 1	Implikacija od x_1 ka x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	$f_{13} = \overline{x}_1 + x_2$
f_{14}	1 1 1 0	Sheffer-ova crtica NI funkcija	$x_1 \mid x_2$	$f_{14} = \overline{x_1 x_2}$
f_{15}	1 1 1 1	Konstanta jedinica	1	$f_{15} = 1$

Slika 4 Prekidačke funkcije dve promenljive

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.2 PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA BULOVIM IZRAZIMA

II.2.3 PREKIDAČKE FUNKCIJE JEDNE I DVE PROMENLJIVE

Prve dve kolone tablica predstavljaju kombinacione tablice prekidačkih funkcija jedne i dve promenljive. U njima su dati ulazni vektori i vrednosti funkcija za svaki od tih vektora. U slučaju prekidačke funkcije jedne promenljive ulazni signal je x. Zbog toga su ulazni vektori 0 i 1, a njihovi indeksi 0 i 1. U slučaju prekidačke funkcije dve promenljive ulazni signali su x_1 i x_2. Zbog toga su ulazni vektori 00, 01, 10 i 11, a njihovi indeksi 0, 1, 2 i 3. Prekidačkim funkcijama jedne promenljive f_0 do f_3 dodeljeni su indeksi 0 do 3 tako što se uređeni niz vrednosti funkcije za ulazne vektore sa indeksima 0 i 1 posmatra kao binarni broj. Prekidačkim funkcijama dve promenljive f_0 do f_{15} dodeljeni su indeksi 0 do 15 tako što se uređeni niz vrednosti funkcije za ulazne vektore sa indeksima 0 do 3 posmatra kao binarni broj.

U trećoj, četvrtoj i petoj koloni su dati nazivi funkcija, oznake i Bulovi izrazi.

Prekidačke funkcije u drugoj polovini obe tablice su komplementi prekidačkih funkcija iz prve polovine tih tablica.

Od četiri prekidačke funkcije jedne promenljive, dve zavise od te promenljive, a dve su konstante nula i jedinica.

Od 16 prekidačkih funkcija dve promenljive, 10 zavise od obe promenljive, četiri zavise od jedne promenljive, a dve su konstante nula i jedinica.

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.3 PREDSTAVLJANJE NORMALNIH FORMI POMOĆU KUBOVA

Uređena n-torka a_1a_2 ... a_n naziva se kub.
Elementi a_1, a_2, ..., a_n predstavljaju koordinate kuba.
Koordinate kuba uzimaju vrednosti iz skupa {0, 1, X}.
Simbol "X" označava koordinatu koja može da dobije proizvoljnu vrednost iz skupa {0, 1}.
Broj koordinata sa vrednošću "X" naziva se rang kuba.
Kub ranga r predstavlja skup od 2^r vektora koji imaju k=n–r jednakih koordinata. Za te vektore se kaže da propadaju kubu.

Primer: Dat je kub 0X1X1.

Kod ovog kuba broj koordinata je n = 5, a rang je r = 2. Stoga ovaj kub predstavlja skup od $2^r = 2^2 = 4$ vektora koji imaju k = n-r = 5-2 = 3 zajedničke koordinate, a razlikuju se u vrednostima r = 2 koordinate. To su vektori: 0**0**1**0**1, 0**0**1**1**1, 0**1**1**0**1 i 0**1**1**1**1.

Na osnovu definicije kuba moguće je uspostaviti korespondenciju između kubova i elementarnih proizvoda i između kubova i elementarnih suma.

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.3 PREDSTAVLJANJE NORMALNIH FORMI POMOĆU KUBOVA

Uspostavljanje korespondencije između kubova i elementarnih proizvoda.

Elementarnom proizvodu

$p = \tilde{x}_{j_1}\tilde{x}_{j_2}...\tilde{x}_{j_k}$,

koji se posmatra kao funkcija n promenljivih, pridružuje se kub

$a_1a_2 \ldots a_n$,

u kojem je

$a_j = 0$, ako se promenljiva x_j pojavljuje u p sa negacijom,
$a_j = 1$, ako se promenljiva x_j pojavljuje u p bez negacije i
$a_j = X$, ako se promenljiva x_j ne pojavljuje u p.

Primer: Elementarnim proizvodima

$\overline{x}_1$, x_2, $x_1\overline{x}_3$, $\overline{x}_2x_3x_4$ i $x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$

koji se smatraju funkcijama četiri promenljive odgovaraju kubovi

0XXX, X1XX, 1X0X, X011 i 1001.

Rang kuba pridruženog elementarnom proizvodu je jednak rangu tog elementarnog proizvoda.
Kub pridružen elementarnom proizvodu predstavlja skup vektora na kojima taj elementarni proizvod ima vrednost 1.

Potpunom proizvodu pridružuje se kub ranga 0.
Kub ranga 0 pridružen potpunom proizvodu poklapa se sa vektorom na kojem taj potpuni proizvod ima vrednost 1.

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.3 PREDSTAVLJANJE NORMALNIH FORMI POMOĆU KUBOVA

Uspostavljanje korespondenciju između kubova i elementarnih suma.

Elementarnoj sumi

$s = \tilde{x}_{j_1} + \tilde{x}_{j_2} + \ldots + \tilde{x}_{j_k}$,,

koji se posmatra kao funkcija n promenljivih, pridružuje se kub

$a_1a_2 \ldots a_n$,

u kojem je

$a_j = 0$, ako se promenljiva x_j pojavljuje u s bez negacije,
$a_j = 1$, ako se promenljiva x_j pojavljuje u s sa negacijom i
$a_j = X$, ako se promenljiva x_j ne pojavljuje u s.

Primer: Elementarnim sumama

$\bar{x}_1$, x_3, $x_1 + \bar{x}_4$, $x_1 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4$ i $x_1 + \bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4$

koji se smatraju funkcijama četiri promenljive odgovaraju kubovi

1XXX, XX0X, 0XX1, 0X11 i 0101.

Rang kuba pridruženog elementarnoj sumi je jednak rangu te elementarne sume.
<u>Kub pridružen elementarnoj sumi predstavlja skup vektora na kojima ta elementarna suma ima vrednost 0.</u>

Potpunoj sumi pridružuje se kub ranga 0.
Kub ranga 0 pridružen potpunoj sumi poklapa se sa vektorom na kojem ta potpuna suma ima vrednost 0.

II. PREKIDAČKE FUNKCIJE

II.3 PREDSTAVLJANJE NORMALNIH FORMI POMOĆU KUBOVA

Na osnovu definisane korespondencije između elementarnih proizvoda i kubova utvrđuje se predstavljanje DNF pomoću kubova.

Primer: Zadati DNF

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 + x_2 x_3 + x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$

se može predstaviti kao

f(1) = {0XX, X11, 100}

Na osnovu definisane korespondencije između elementarnih suma i kubova utvrđuje se predstavljanje KNF pomoću kubova.

Primer: Zadati KNF

$f(x_1, x_2, x_3) = x_2\,(x_1 + \overline{x}_3)\,(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)$

se može predstaviti kao

f(0) = {X0X, 0X1, 111}