UNIVERZITET U BEOGRADU

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

OSNOVI RAČUNARSKE TEHNIKE I

JOVAN ĐORĐEVIĆ

BEOGRAD, 2013

I. BULOVA ALGEBRA

I. BULOVA ALGEBRA

I.1 AKSIOME BULOVE ALGEBRE

Neka su na skupu B = {a, b, c, ... } definisane

unarna operacija " − " i binarne operacije " + " i " · "

koje se obično se nazivaju komplementiranje, sabiranje i množenje
i to tako da

za svako $a \in B$ vredi $\bar{a} = b$, gde je $b \in B$ i

za svako $a,b \in B$ vredi $a + b = c$ i $a \cdot b = c$, gde je $c \in B$.

Skup B sa operacijama " − ", " + " i " · " predstavlja Bulovu algebru ako operacije zadovoljavaju sledeće aksiome – postulate:

I. BULOVA ALGEBRA

I.1 AKSIOME BULOVE ALGEBRE

1. zakon asocijativnosti
   a) $a + (b + c) = (a + b) + c$
   b) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

2. zakon komutativnosti
   a) $a + b = b + a$
   b) $a \cdot b = b \cdot a$

3. neutralni elementi 0 i 1
   a) $a + 0 = 0 + a = a$
   b) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

4. zakon komplementarnosti
   a) $a + \overline{a} = 1$
   b) $a \cdot \overline{a} = 0$

5. zakon distributivnosti
   a) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
   b) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

I. BULOVA ALGEBRA

I.1 AKSIOME BULOVE ALGEBRE

Iz aksioma Bulove algebre se vidi

1. da su sve aksiome date u obliku jednakosti Bulovih izraza i
2. da postoji simetričnost aksioma

I. BULOVA ALGEBRA

I.1 AKSIOME BULOVE ALGEBRE

1. Bulovi izrazi

Bulovi izrazi se formiraju kombinacijom simbola koji u Bulovoj algebri označavaju elemente i operacije.

Usvojena je sledeća konvencija o prioritetu operacija

1. najviši prioritet ima unarna operacija " − ",
2. druga po prioritetu je binarna operacija " · " i
3. najniži prioritet ima binarna operacija " + "

Zagrade se koriste za promenu redosleda operacija.

Primer: $a \cdot b + c$ i $a \cdot (b + c)$

Zagrade se ne moraju pisati kada je jasan redosled operacija.

Primer: umesto $\overline{(a+b)}$ može se pisati $\overline{a+b}$,

Znak operacije " · " se može izostaviti.

Primer: umesto $a \cdot b$ može se pisati ab,

I. BULOVA ALGEBRA

I.1 AKSIOME BULOVE ALGEBRE

2. Simetričnost aksioma

Iz simetričnosti aksioma Bulove algebre proizlazi princip dualnosti.

U definiciji principa dualnosti javlja se pojam dualnog izraza.

Bulov izraz Q^d je dualan izrazu Q i obrnuto izraz Q je dualan izrazu $(Q^d)^d$ ukoliko je izraz Q^d dobijen od izraza Q tako što je u njemu

svaki simbol operacije " + " zamenjen simbolom operacije " · " i obrnuto,
svaki simbol konstante " 1 " zamenjen simbolom konstante " 0 " i obrnuto,
svaki simbol operacije " − " zadržan nepromenjen i
svaki simbol elementa zadržan nepromenjen.

Princip dualnosti, čiji matematički dokaz se ne daje, se definiše na sledeći način:

Ako je u Bulovoj algebri $Q(a,b,c,...) = R(a,b,c,...)$, gde su $Q(a,b,c,...)$ i $R(a,b,c,...)$ Bulovi izrazi, tada vredi i dualna jednakost $Q^d(a,b,c,...) = R^d(a,b,c,...)$, gde su Q^d i R^d dualni Bulovi izrazi za Q i R. Simboli a, b, c, ... i x, y, z, ... označavaju proizvoljne elemente Bulove algebre.

Iz simetričnosti aksioma Bulove algebre proizlazi i mogućnost dokazivanja različitih relacija dualnom supstitucijom. Dokazivanje se vrši na isti način uz odgovarajuću zamenu nekih simbola za operacije i elemente.

I. BULOVA ALGEBRA

I.2 TEOREME BULOVE ALGEBRE

U Bulovoj algebri vredi

1. $\overline{0} = 1$ i $\overline{1} = 0$

2. $\overline{\overline{a}} = a$

3. a) $a + 1 = 1$
   b) $a \cdot 0 = 0$

4. a) $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$
   b) $\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$

5. a) $a + \overline{a} \cdot b = a + b$
   b) $a \cdot (\overline{a} + b) = a \cdot b$

6. a) $a + a = a$
   b) $a \cdot a = a$

Ove teoreme se koriste ravnopravno sa aksiomama pri transformaciji Bulovih izraza.

Dokazi ovih teorema se daju u daljem tekstu.

I.2 TEOREME BULOVE ALGEBRE

Teorema 1. $\overline{0}=1$ i $\overline{1}=0$

Kada se u aksiomi

a) $a + \overline{a} = 1$

b) $a \cdot \overline{a} = 0$

zameni a = 0 dobija se

a) $0 + \overline{0} = 1$

b) $0 \cdot \overline{0} = 0$

Pošto je 0 neutralni element za "+" to je jedino rešenje za $\overline{0}$ koje zadovoljava obe relacije $\overline{0}=1$.

Kada se u aksiomi

a) $a + \overline{a} = 1$

b) $a \cdot \overline{a} = 0$

zameni a = 1 dobija se

a) $1 + \overline{1} = 1$

b) $1 \cdot \overline{1} = 0$

Pošto je 1 neutralni element za "·" to je jedino rešenje za $\overline{1}$ koje zadovoljava obe relacije $\overline{1}=0$.

I.2 TEOREME BULOVE ALGEBRE

Teorema 2. $\bar{\bar{a}} = a$

Kada se u aksiomi

a) $a + \bar{a} = 1$

b) $a \cdot \bar{a} = 0$

umesto a stavi $\bar{a}$ dobija se

a) $\bar{a} + \bar{\bar{a}} = 1$

b) $\bar{a} \cdot \bar{\bar{a}} = 0$

Kada se primeni komutativni zakon dobija se

a) $\bar{\bar{a}} + \bar{a} = 1$

b) $\bar{\bar{a}} \cdot \bar{a} = 0$

Odavde sledi da je $\bar{\bar{a}} = a$.

I. BULOVA ALGEBRA

I.2 TEOREME BULOVE ALGEBRE

Teorema 3. a) $a + 1 = 1$

b) $a \cdot 0 = 0$

a) $a + 1 = (a + 1) \cdot 1$

$a + 1 = (a+1) \cdot (a + \overline{a})$

$a + 1 = a + 1 \cdot \overline{a}$

$a + 1 = a + \overline{a}$

$a + 1 = 1$

b) $a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$

$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot \overline{a}$

$a \cdot 0 = a \cdot (0 + \overline{a})$

$a \cdot 0 = a \cdot \overline{a}$

$a \cdot 0 = 0$

I.2 TEOREME BULOVE ALGEBRE

Teorema 4. a) $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$

b) $\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$

Teorema pod a) će se dokazati pomoću relacije

$$a + b + \overline{a} \cdot \overline{b} = 1$$

iz koje sledi da su $a + b$ i $\overline{a} \cdot \overline{b}$ komplementi

$$a + b + \overline{a} \cdot \overline{b} = (a + b + \overline{a}) \cdot (a + b + \overline{b})$$
$$a + b + \overline{a} \cdot \overline{b} = (b + 1) \cdot (a + 1)$$
$$a + b + \overline{a} \cdot \overline{b} = 1 \cdot 1$$
$$a + b + \overline{a} \cdot \overline{b} = 1$$

Teorema pod b) će se dokazati pomoću relacije

$$a \cdot b \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = 0$$

iz koje sledi da su $a \cdot b$ i $\overline{a} + \overline{b}$ komplementi

$$a \cdot b \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = a \cdot b \cdot \overline{a} + a \cdot b \cdot \overline{b}$$
$$a \cdot b \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = b \cdot 0 + a \cdot 0$$
$$a \cdot b \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = 0 + 0$$
$$a \cdot b \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = 0$$

I. BULOVA ALGEBRA

I.2 TEOREME BULOVE ALGEBRE

Teorema 5. a) $a + \overline{a} \cdot b = a + b$

b) $a \cdot (\overline{a} + b) = a \cdot b$

a) $a + \overline{a} \cdot b = (a + \overline{a}) \cdot (a + b)$

$a + \overline{a} \cdot b = 1 \cdot (a + b)$

$a + \overline{a} \cdot b = a + b$

a) $a \cdot (\overline{a} + b) = a \cdot \overline{a} + a \cdot b$

$a \cdot (\overline{a} + b) = 0 + a \cdot b$

$a \cdot (\overline{a} + b) = a \cdot b$

Teorema 6. a) $a + a = a$
b) $a \cdot a = a$

a) $a + a = (a + a) \cdot 1$
$a + a = (a + a) \cdot (a + \overline{a})$
$a + a = a + a \cdot \overline{a}$
$a + a = a + 0$
$a + a = a$

b) $a \cdot a = a \cdot a + 0$
$a \cdot a = a \cdot a + a \cdot \overline{a}$
$a \cdot a = a \cdot (a + \overline{a})$
$a \cdot a = a \cdot 1$
$a \cdot a = a$

I. BULOVA ALGEBRA

I.3 BULOVA ALGEBRA NA SKUPU SA DVA ELEMENTA

U Bulovoj algebri na skupu sa dva elementa moraju da budu elementi 0 i 1, jer predstavljaju neutralne elemente za operacije " + " i " · ", respektivno.

Bulova algebra na skupu sa dva elementa se dobija tako što se na skupu {0, 1} definišu operacije " − ", " + " i " · " prema tablicama sa slike 1.

−	0	1
	1	0

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Slika 1 Operacije " − ", " + " i " · "

Skup {0, 1} sa operacijama " − ", " + " i " · " predstavlja Bulovu algebru ako operacije zadovoljavaju sledeće aksiome-postulate

1. zakon asocijativnosti
   a) $a + (b + c) = (a + b) + c$
   b) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

2. zakon komutativnosti
   a) $a + b = b + a$
   b) $a \cdot b = b \cdot a$

3. neutralni elementi 0 i 1
   a) $a + 0 = 0 + a = a$
   b) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

4. zakon komplementarnosti
   a) $a + \bar{a} = 1$
   b) $a \cdot \bar{a} = 0$

5. zakon distributivnosti
   a) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
   b) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

To se može dokazati uvrštavanjem svih mogućih kombinacija elemenata skupa {0, 1} u relacije koje predstavljaju aksiome Bulove algebre i izračunavanjem vrednosti saglasno datim tablicama za operacije " − ", " + " i " · ".

Postupak će se ilustrovati proverom jedne od relacija i to relacije

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

za zakon asocijativnosti za operaciju " + ".

Proveru treba izvršiti za $2^3 = 8$ kombinacija vrednosti tih elemenata koristeći tablicu za operaciju " + ".

I.3 BULOVA ALGEBRA NA SKUPU SA DVA ELEMENTA

1. Kombinacija: $a = 0, b = 0, c = 0$;
   $a + (b + c) = (a + b) + c,$
   $0 + (0 + 0) = (0 + 0) + 0,$
   $0 + 0 = 0 + 0,$
   $0 = 0;$
2. Kombinacija: $a = 0, b = 0, c = 1$;
   $a + (b + c) = (a + b) + c,$
   $0 + (0 + 1) = (0 + 0) + 1,$
   $0 + 1 = 0 + 1,$
   $1 = 1;$
3. Kombinacija: $a = 0, b = 1, c = 0$;
   $a + (b + c) = (a + b) + c,$
   $0 + (1 + 0) = (0 + 1) + 0,$
   $0 + 1 = 1 + 0,$
   $1 = 1;$
4. Kombinacija: $a = 0, b = 1, c = 1$;
   $a + (b + c) = (a + b) + c,$
   $0 + (1 + 1) = (0 + 1) + 1,$
   $0 + 1 = 1 + 0,$
   $1 = 1;$
5. Kombinacija: $a = 1, b = 0, c = 0$;
   $a + (b + c) = (a + b) + c,$
   $1 + (0 + 0) = (1 + 0) + 0,$
   $1 + 0 = 1 + 0,$
   $1 = 1;$
6. Kombinacija: $a = 1, b = 0, c = 1$;
   $a + (b + c) = (a + b) + c,$
   $1 + (0 + 1) = (1 + 0) + 1,$
   $1 + 1 = 1 + 1,$
   $1 = 1;$
7. Kombinacija: $a = 1, b = 1, c = 0$;
   $a + (b + c) = (a + b) + c,$
   $1 + (1 + 0) = (1 + 1) + 0,$
   $1 + 1 = 1 + 0,$
   $1 = 1;$
8. Kombinacija: $a = 1, b = 1, c = 1$;
   $a + (b + c) = (a + b) + c,$
   $1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1,$
   $1 + 1 = 1 + 1,$
   $1 = 1;$

Ovim je dokazano da zakon asocijativnosti vredi za operaciju " + " definisanu tablicom sa slike 1.

Na isti način bi se moglo dokazati da i ostale realicije koje se pojavljuju u aksiomama Bulove algebre vrede za operacije " − ", " + " i " · " definisane tablicama sa slike 1.

Ovaj način dokazivanja se naziva metoda iscrpljivanja svih mogućih slučajeva ili perfektna indukcija.

Bulova algebra na skupu od dva elementa se često naziva prekidačka algebra. Naziv dolazi od praktične primene Bulove algebre na skupu od dva elementa za predstavljanje prekidačkih funkcija koje se koriste pri projektovanju prekidačkih mreža.

Za operacije " − ", " + " i " · " se u prekidačkoj algebri često koriste i nazivi negacija, disjunkcija i konjukcija, respektivno.