

Pronalaženje skrivenog znanja

Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu

Master akademske studije

modul Računarska tehnika i informatika

2017/2018

Naiivni bajesovski klasifikator

Vuk Batanović, Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu

Thomas Bayes (1701 - 1761)

- ▶ Engleski statističar i filozof
- ▶ Autor teoreme o verovatnoći:

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$



Primena Bajesove teoreme u klasifikaciji

$$P(y|x) = \frac{P(y, x)}{P(x)} = \frac{P(x|y)P(y)}{P(x)}$$

- ▶ y je klasa, x je podatak
- ▶ $P(y)$ - prethodna/apriorna verovatnoća klase (engl. *prior probability*)
- ▶ $P(y|x)$ - aposteriorna verovatnoća klase (engl. *posterior probability*)
- ▶ $P(y, x)$ - zajednička verovatnoća klase i podatka (engl. *joint probability*)
- ▶ $P(x|y)$ - funkcija izvesnosti (engl. *likelihood function*)

Primena Bajesove teoreme u klasifikaciji

$$P(y|x) = \frac{P(y, x)}{P(x)} = \frac{P(x|y)P(y)}{P(x)}$$

- ▶ Klasifikaciona odluka - podatak svrstati u onu klasu koja je za njega najverovatnija tj. ima najveću aposteriornu verovatnoću
- ▶ Ovakvo odlučivanje se naziva *Maximum a posteriori* - MAP

$$\begin{aligned} y_{MAP} &= \operatorname{argmax}_y P(y|x) \\ &= \operatorname{argmax}_y \frac{P(x|y)P(y)}{P(x)} \\ &= \operatorname{argmax}_y P(x|y)P(y) \end{aligned}$$

Primena Bajesove teoreme u klasifikaciji

- ▶ Da bi se izvršila klasifikacija potrebni su $P(y)$ i $P(x|y)$
- ▶ $P(y)$ - zastupljenost klase y u skupu podataka za obučavanje:

$$P(y) = \frac{\text{Count}(y)}{\text{Count}(x)}$$

- ▶ Podatak x se predstavlja pomoću nekih njegovih odlika, kojih ima n :

$$P(x|y) = P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n | y)$$

- ▶ Koristeći pravilo ulančavanja uslovnih verovatnoća sledi:

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n | y) &= P(x_1 | y)P(x_2, x_3, \dots, x_n | y, x_1) \\ &= P(x_1 | y)P(x_2 | y, x_1)P(x_3, \dots, x_n | y, x_1, x_2) \\ &= P(x_1 | y)P(x_2 | y, x_1) \cdots P(x_n | y, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

Naivna pretpostavka o statističkoj nezavisnosti odlika

- ▶ Pretpostavka: odlike koje se koriste pri odlučivanju nisu statistički zavisne jedna od druge - poznavanje vrednosti jedne odlike ništa ne govori o vrednosti neke druge
- ▶ Ako je tako, onda važi:

$$\begin{aligned}P(x|y) &= P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n|y) \\ &= P(x_1|y)P(x_2|y) \cdots P(x_n|y) \\ &= \prod_{i=1}^n P(x_i|y)\end{aligned}$$

- ▶ Time uslovna verovatnoća svake odlike zavisi samo od klase podatka
- ▶ Raspodela te verovatnoće - multinomijalna, Bernulijeva, Gausova,...

“

Essentially, all models are wrong,
but some are useful.

”

britanski statističar George Box

- ▶ Iako je praktično uvek pogrešna, pretpostavka o međusobnoj statističkoj nezavisnosti odlika znatno olakšava modeliranje
- ▶ U praksi, naivni bajesovski modeli često ostvaruju dobre rezultate - za pravilnu klasifikaciju nije neophodno poznavanje tačnih vrednosti $P(y|x)$ za sve y , već samo njihovog međusobnog redosleda

Formula za određivanje pripadnosti klasi

$$\begin{aligned} y_{MAP} &= \operatorname{argmax}_y P(x|y)P(y) \\ &= \operatorname{argmax}_y P(y) \prod_{i=1}^n P(x_i|y) \end{aligned}$$

- ▶ Broj odlika je često veoma veliki, a verovatnoće su u opsegu [0,1]
- ▶ Da bi se izbegao *floating point underflow* umesto množenja verovatnoća vrši se sabiranje njihovih logaritama:

$$y_{MAP} = \operatorname{argmax}_y \left(\log P(y) + \sum_{i=1}^n \log P(x_i|y) \right)$$

Metod najveće izvesnosti

- ▶ Verovatnoća $P(x_t|y)$ - odnos između zbirne vrednosti odlike x_t u podacima klase y i zbirne vrednosti svih odlika u podacima te klase:

$$P(x_t|y) = \frac{\text{Count}(x_t, y)}{\sum_{i=1}^n \text{Count}(x_i, y)}$$

- ▶ Ovakav metod određivanja verovatnoća $P(x_t|y)$ se naziva metod najveće izvesnosti (engl. *Maximum Likelihood Estimation - MLE*) jer se njime maksimizuje verovatnoća da podaci nad kojima se model obučava budu pravilno klasifikovani

Metod najveće izvesnosti

- ▶ Šta se dešava kada se odlika x_t nikad ne javlja u podacima klase y u skupu za obučavanje?
 - ▶ $P(x_t|y) = 0$
 - ▶ Model odbacuje klasu y na osnovu samo jedne odlike
- ▶ Ovakvo rezonovanje je problematično jer odsustvo odlike x_t u podacima klase y iz skupa za obučavanje može da bude slučajno
 - ▶ Naročito ako je broj odlika veliki, a skup za obučavanje mali - problem proređenosti podataka (engl. *data sparsity*)
 - ▶ Preterana prilagođenost modela (engl. *overfitting*)
- ▶ Korekcija - umesto $P(x_t|y) = 0$ staviti da je $P(x_t|y)$ jednako nekoj maloj nenuljoj vrednosti

Laplasovo poravnanje

- ▶ Laplasovo poravnanje (engl. *Laplace smoothing*) ili aditivno poravnanje - brojanje zbirne vrednosti odlika u svakoj klasi ne počinje od nule već od neke predefinisane vrednosti α
 - ▶ Obično se uzima $\alpha = 1$
- ▶ Verovatnoća $P(x_t|y)$ se stoga računa kao:

$$P(x_t|y) = \frac{\text{Count}(x_t, y) + 1}{\sum_{i=1}^n (\text{Count}(x_i, y) + 1)} = \frac{\text{Count}(x_t, y) + 1}{n + \sum_{i=1}^n \text{Count}(x_i, y)}$$

- ▶ Laplasovo poravnanje se može smatrati oblikom regularizacije modela
- ▶ Deo verovatnoća javljanja odlika viđenih u klasi y u skupu za obučavanje se preraspodeljuje na odlike koje u toj klasi nisu (još uvek) opažene

Poziciona nezavisnost odlika

- ▶ (Multinomijalni) naivni bajesovski model implicitno pretpostavlja da ne postoji zavisnost između uslovne verovatnoće odlika i njihove pozicije u podacima
 - ▶ Primer: raspored reči u tekstu pri klasifikaciji dokumenata
- ▶ Ukoliko su podaci tako strukturirani da postoji redosled između odlika koje se razmatraju, taj redosled se u modelu ignoriše
 - ▶ U modeliranju tekstualnih podataka ovaj pristup je poznat kao vreća reči (engl. *bag-of-words*), pri čemu su individualne reči odlike koje se uzimaju u obzir
- ▶ Ovakva pretpostavka omogućava da se broj parametara modela drastično smanji

Multinomijalni naivni bajesovski klasifikator

- ▶ Do sada opisan model se naziva multinomijalnim bajesovskim klasifikatorom (engl. *Multinomial Naïve Bayes*)
- ▶ $Count(x_t, y)$ govori o zbirnoj vrednosti odlike x_t u podacima klase y
- ▶ Ponekad se odlike binarizuju - tada $Count(x_t, y)$ govori u koliko podataka klase y se odlika x_t javlja, a ne koja je njena zbirna vrednost u tim podacima
- ▶ U računanju $P(x|y)$ učestvuju samo one odlike koje se javljaju (imaju nenultu vrednost) u podatku x

Primer klasifikacije teksta - multinomijalni naivni bajesovski klasifikator

	doc	Reči u dokumentu	Klasa
Skup za obučavanje	1	Chinese Beijing Chinese	C
	2	Chinese Chinese Shanghai	C
	3	Beijing Macao	C
	4	Tokyo Japan Chinese	J
Skup za testiranje	5	Chinese Chinese Chinese Tokyo Japan	?

$$P(C) = \frac{3}{4}$$

$$P(J) = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{Chinese}|C) = \frac{4 + 1}{6 + 8} = \frac{5}{14}$$

$$P(\text{Tokyo}|C) = \frac{0 + 1}{6 + 8} = \frac{1}{14}$$

$$P(\text{Japan}|C) = \frac{0 + 1}{6 + 8} = \frac{1}{14}$$

$$P(\text{Chinese}|J) = \frac{1 + 1}{6 + 3} = \frac{2}{9}$$

$$P(\text{Tokyo}|J) = \frac{1 + 1}{6 + 3} = \frac{2}{9}$$

$$P(\text{Japan}|J) = \frac{1 + 1}{6 + 3} = \frac{2}{9}$$

Primer klasifikacije teksta - multinomijalni naivni bajesovski klasifikator

	doc	Reči u dokumentu	Klasa
Skup za obučavanje	1	Chinese Beijing Chinese	C
	2	Chinese Chinese Shanghai	C
	3	Beijing Macao	C
	4	Tokyo Japan Chinese	J
Skup za testiranje	5	Chinese Chinese Chinese Tokyo Japan	?

$$P(C|d5) \propto P(C)P(\text{Chinese}|C)^3P(\text{Tokyo}|C)P(\text{Japan}|C) = \frac{3}{4} \times \left(\frac{5}{14}\right)^3 \times \frac{1}{14} \times \frac{1}{14} \approx 0.000174$$

$$P(J|d5) \propto P(J)P(\text{Chinese}|J)^3P(\text{Tokyo}|J)P(\text{Japan}|J) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{9}\right)^3 \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} \approx 0.000135$$

Multivarijacioni Bernulijev naivni bajesovski klasifikator

- ▶ U čestoj upotrebi u klasifikaciji teksta je i multivarijacioni Bernulijev bajesovski klasifikator (engl. *Multivariate Bernoulli Naïve Bayes*)
- ▶ Svaka odlika je binarnog/indikatorskog tipa
- ▶ $Count(x_t, y)$ govori u koliko podataka klase y se odlika x_t javlja
- ▶ U računanju $P(x|y)$ učestvuju sve odlike koje se koriste u modelu, čak i one koje se ne javljaju (imaju nultu vrednost) u podatku x
- ▶ Pretpostavka o pozicionoj nezavisnosti odlika ovde nije neophodna, jer Bernulijev model po definiciji uzima u obzir samo prisustvo/odsustvo odlika

Multivarijacioni Bernulijev naivni bajesovski klasifikator

- ▶ Verovatnoća $P(x_t|y)$ - procenat podataka klase y u kojima je odlika x_t prisutna:

$$P(x_t|y) = \frac{\text{Count}(x_t, y)}{\text{Count}(y)}$$

- ▶ Laplasovo poravnanje:

$$P(x_t|y) = \frac{\text{Count}(x_t, y) + 1}{K + \text{Count}(y)} = \frac{\text{Count}(x_t, y) + 1}{2 + \text{Count}(y)}$$

- ▶ K je broj mogućih ishoda tj. vrednosti odlike x_t
- ▶ $K = 2$ kad je odlika x_t binarna

Primer klasifikacije teksta - multivarijacioni Bernulijev naivni bajesovski klasifikator

	doc	Reči u dokumentu	Klasa
Skup za obučavanje	1	Chinese Beijing Chinese	C
	2	Chinese Chinese Shanghai	C
	3	Beijing Macao	C
	4	Tokyo Japan Chinese	J
Skup za testiranje	5	Chinese Chinese Chinese Tokyo Japan	?

$$P(C) = \frac{3}{4}$$

$$P(J) = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{Chinese}|C) = \frac{2 + 1}{2 + 3} = \frac{3}{5}$$

$$P(\text{Tokyo}|C) = \frac{0 + 1}{2 + 3} = \frac{1}{5}$$

$$P(\text{Japan}|C) = \frac{0 + 1}{2 + 3} = \frac{1}{5}$$

$$P(\text{Chinese}|J) = \frac{1 + 1}{2 + 1} = \frac{2}{3}$$

$$P(\text{Tokyo}|J) = \frac{1 + 1}{2 + 1} = \frac{2}{3}$$

$$P(\text{Japan}|J) = \frac{1 + 1}{2 + 1} = \frac{2}{3}$$

Primer klasifikacije teksta - multivarijacioni Bernulijev naivni bajesovski klasifikator

	doc	Reči u dokumentu	Klasa
Skup za obučavanje	1	Chinese Beijing Chinese	C
	2	Chinese Chinese Shanghai	C
	3	Beijing Macao	C
	4	Tokyo Japan Chinese	J
Skup za testiranje	5	Chinese Chinese Chinese Tokyo Japan	?

$$P(C) = \frac{3}{4}$$

$$P(J) = \frac{1}{4}$$

$$P(Beijing|C) = \frac{2+1}{2+3} = \frac{3}{5}$$

$$P(Shanghai|C) = \frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}$$

$$P(Macao|C) = \frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}$$

$$P(Beijing|J) = \frac{0+1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$P(Shanghai|J) = \frac{0+1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$P(Macao|J) = \frac{0+1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

Primer klasifikacije teksta - multivarijacioni Bernulijev naivni bajesovski klasifikator

	doc	Reči u dokumentu	Klasa
Skup za obučavanje	1	Chinese Beijing Chinese	C
	2	Chinese Chinese Shanghai	C
	3	Beijing Macao	C
	4	Tokyo Japan Chinese	J
Skup za testiranje	5	Chinese Chinese Chinese Tokyo Japan	?

$$P(C|d5) \propto P(C) \times P(\text{Chinese}|C) \times P(\text{Tokyo}|C) \times P(\text{Japan}|C) \\ \times (1 - P(\text{Beijing}|C)) \times (1 - P(\text{Shanghai}|C)) \times (1 - P(\text{Macao}|C)) =$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \approx 0.0026$$

Primer klasifikacije teksta - multivarijacioni Bernulijev naivni bajesovski klasifikator

	doc	Reči u dokumentu	Klasa
Skup za obučavanje	1	Chinese Beijing Chinese	C
	2	Chinese Chinese Shanghai	C
	3	Beijing Macao	C
	4	Tokyo Japan Chinese	J
Skup za testiranje	5	Chinese Chinese Chinese Tokyo Japan	?

$$P(J|d5) \propto P(J) \times P(\text{Chinese}|J) \times P(\text{Tokyo}|J) \times P(\text{Japan}|J) \\ \times (1 - P(\text{Beijing}|J)) \times (1 - P(\text{Shanghai}|J)) \times (1 - P(\text{Macao}|J)) =$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \approx 0.022$$

Razlike između multinomijalnog i Bernulijevog modela u klasifikaciji teksta

	Multinomijalni model	Bernulijev model
$Count(x_t, y)$	Broje se (sabiraju) vrednosti odlike x_t u podacima klase y	Broje se javljanja odlike x_t u podacima klase y
x_t	Nije binarnog tipa (ali se može binarizovati)	Binarnog tipa
$P(x_t y)$	Odnos zbirne vrednosti odlike x_t i zbirne vrednosti svih odlika u podacima klase y	Procenat podataka klase y u kojima je odlika x_t prisutna
$P(x y)$	Uključuje samo odlike koje se javljaju (imaju nenultu vrednost) u podatku x	Uključuje sve odlike koje se koriste u modelu
Laplasovo poravnanje	$\frac{Count(x_t, y) + 1}{n + \sum_{i=1}^n Count(x_i, y)}$	$\frac{Count(x_t, y) + 1}{K + Count(y)}$

Razlike između multinomijalnog i Bernulijevog modela u klasifikaciji teksta

- ▶ Pretpostavka o pozicionoj nezavisnosti odlika
 - ▶ Multinomijalni model - potrebna
 - ▶ Bernulijev model - nepotrebna
- ▶ Binarizovan multinomijalni model nije jednak Bernulijevom!

Generativni modeli

- ▶ Modeliraju zajedničku verovatnoću klase i podataka $P(y, x)$
- ▶ Na taj način se modelira proces generisanja podataka određenog tipa
- ▶ Naivni bajesovski klasifikator je generativni model - aposteriorna verovatnoća klase se dobija iz zajedničke verovatnoće preko Bajesove teoreme:

$$P(y|x) = \frac{P(y, x)}{P(x)}$$

- ▶ U generativne modele spadaju:
 - ▶ skriveni Markovljevi lanci (engl. HMM - *Hidden Markov Models*)
 - ▶ Bajesovske mreže (engl. *Bayesian networks*)
 - ▶ latentna Dirišleova analiza (engl. LDA - *Latent Dirichlet Analysis*)

Prednosti naivnog bajesovskog klasifikatora

- ▶ Jednostavnost
- ▶ Brzina učenja i klasifikacije - dovoljan jedan prolaz kroz podatke
- ▶ Nije osetljiv na irelevantne odlike
- ▶ Dobro se ponaša kada postoji veći broj podjednako važnih odlika
- ▶ Interpretabilnost - veća težina pridružena određenoj odlici znači da je ona važnija pri odlučivanju
- ▶ Direktno je primenjiv na višeklasnu klasifikaciju
- ▶ Model se lako može ažurirati novopristiglim podacima

Mane naivnog bayesovskog klasifikatora

- ▶ (Netačna) pretpostavka o statističkoj nezavisnosti odlika
 - ▶ Kada su dve odlike korelisane dolazi do duplog brojanja - daje iskrivljene procene o važnosti odlika
- ▶ Vrednosti aposteriornih verovatnoća koje model daje su često znatno iskrivljene u korist najverovatnije klase

Upotreba naivnog bajesovskog klasifikatora

- ▶ Često se koristi kao *baseline* zbog svoje jednostavnosti i brzine
- ▶ Često postiže bolje performanse od složenijih modela kada je dostupno malo podataka za obučavanje
- ▶ Zbog brzine je kompetitivan i kada je dostupno puno podataka
- ▶ Raširen algoritam u klasifikaciji tekstualnih podataka
 - ▶ Multinomijalna varijanta (sa binarizovanim odlikama) obično najbolja
 - ▶ Primene - detekcija spama, analiza sentimenta, klasifikacija teksta po temama, analiza autorstva,...
- ▶ Koristi se i u medicinskoj dijagnostici, analizi genomskih podataka,...